Chauffe ENSAM – 2/2

Mercredi 14 mai 2017

1 Méthode des trapèzes (St-Cyr 2015)

1. Programmer la méthode des trapèzes.
   On pose pour la suite :

$$\forall x \geqslant 0, \qquad I(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan t)}{\tan t} dt.$$

2. Justifier que $I(x)$ est bien défini pour tout $x \geqslant 0$.
3. Tracer le graphe de I sur $[0, 10]$.
4. Déterminer un réel x tel que $I(x) = \frac{\pi}{2}$.

2 Code de permutations (ENSAM 2016)

On définit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[\![0, n-1]\!]$ dans lui-même. Le *code normal* d'une telle bijection est la liste `[f(0),f(1),...,f(n-1)]`

1. Écrire une fonction prenant en entrée une liste et retournant un booléen précisant si la liste code ou non une permutation.
2. Écrire une fonction prenant en entrée les codes normaux de deux permutations et retournant celui de leur composée (à spécifier dans le programme).
   Un échange est une permutation f fixant tous les éléments sauf deux qu'elle échange. Si ces deux éléments sont k et l, alors le code spécial *d'une telle permutation est la liste* `[k, l]`.
3. Écrire une fonction testant si une permutation (donnée par son code normal) est un échange.
4. Écrire une fonction prenant en entrée le code normal d'un échange et retournant son code spécial.
5. Écrire une fonction prenant en entrée le code spécial d'un échange (ainsi que n) et retournant son code normal (vue comme élément de $\mathcal{S}_n$).

3 Nombres de Flavius Josèphe (ENSAM 2015)

On s'intéresse aux nombres de Flavius Josèphe, construits de la façon suivante : on prend la liste des entiers naturels strictement positifs $1, 2, \ldots$ On en supprime un sur deux : il reste $1, 3, 5, \ldots$ On en supprime un sur trois : il reste $1, 3, 7, 9, \ldots$ Et ainsi de suite !

1. Préliminaire technique : exécuter dans l'interpréteur les commandes suivantes pour comprendre le fonctionnement de la méthode de listes `remove` :

```
L = [19, 10, 4, 12, 1, 42, 17, 1515, 2048]
L.remove( 4 )
L
L.remove( L[4] )
L
L.remove( L[5] )
L
```

2. Écrire une fonction `FJ` qui, étant donné un entier n, calcule en renvoie la liste des nombres de Flavius Josèphe majorés par n.
   On pourra s'inspirer de la structure suivante :

```
def FJ(n):
    liste = list(range(n+1)) # indexés de 0 à n
    pas = 2
    while pas < 1+len(liste):
        ...
        ...
    return liste[1:] # pour enlever le 0 initial
```

3. Écrire une fonction permettant de calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $U(n)$ de nombres de Flavius Josèphe inférieurs ou égaux à n.
4. La suite $\left(\dfrac{4n}{U(n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ semble-t-elle converger [1] ? Conjecturer la valeur de sa limite ℓ.
5. Déterminer le premier $n > 0$ tel que $\left|\dfrac{4n}{U(n)^2} - \ell\right| \leqslant 10^{-3}$

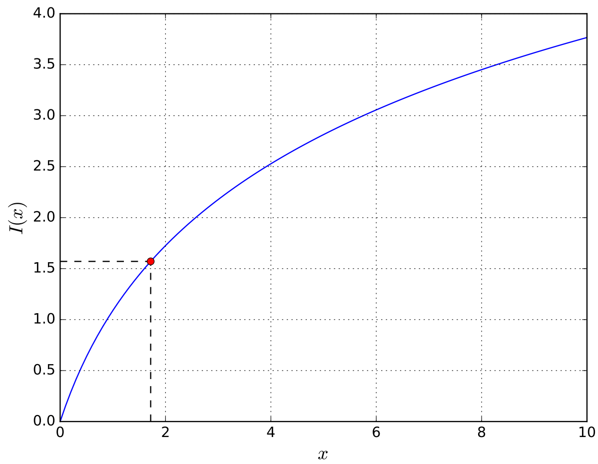
4 Que des 1 (ENSAM 2015)

On admet que tout entier naturel n impair et non multiple de 5 possède un multiple entier N ne s'écrivant qu'avec des 1 en base 10.

1. Définir une fonction prenant en entrée n et retournant le plus petit N correspondant.
2. Afficher les couples (n, N) pour n variant de 1 à 100.
3. Définir une fonction donnant le nombre de chiffres (en base 10) d'un entier. [2]
4. Pour $n \leqslant 1000$, chercher les couples (n, N) avec N de longueur maximale.

Les ex-MPSI peuvent prouver le résultat admis dans le préambule !

5 Un graphe



1. Suspens !
2. OK, mais moi je n'utilise pas cette question pour répondre à la suivante !