Chauffe Centrale – 2/3

Mercredi 7 juin 2017

Les énoncés reprennent des sujets posés en 2016... et adaptés/débugués/enrichis un peu pour certains.

Howto

— Lisez ces énoncés avant le TP. Traitez les parties mathématiques et réfléchissez à la façon de programmer ceci ou cela ; quelles sont les fonctions/fonctionnalités que vous ne connaissez pas et au sujet desquelles il sera donc important de m'interroger le jour du TP ?
— Vous pouvez essayer de traiter complètement un exo (ou plus) que je regarderai le jour J.
— Vous pouvez(/devez) avoir sous les yeux les documents d'accompagnement de Centrale.
— Vous devez savoir faire un `plot` minimal sans avoir à consulter la moindre documentation !

1 Premier exercice

Hum... je détaille ?

2 Une intégrale impropre (Anthony Bibollet-Ruche)

On considère la fonction $f : x > 0 \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$.

1. Représenter le graphe de f à l'aide de Python. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour la suite, on définit :
   $$A = \int_0^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \forall a > 0, \quad F(a) = \int_0^a f(x)dx.$$
   (a) Déterminer un $x > 0$ tel que $e^t - 1 \geqslant e^{t/2}$ pour tout $t \geqslant x$.
   (b) Déterminer a tel que $|F(a) - A| \leqslant 10^{-5}$.
   (c) Déterminer une approximation de $F(a)$ à l'aide de la méthode des rectangles ou des trapèzes.
   (d) Comparer au résultat donné par la fonction `quad` (sur $]0, a]$ et sur $]0, +\infty[$).
2. Déterminer[1] une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :
   $$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$
3. En déduire une nouvelle approximation de A, en déterminant N tel que $\left| A - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \right| \leqslant 10^{-5}$.
   Comparer...

Demandé à Anthony : la précision de la méthode des rectangles/trapèzes, et s'il connaissait une autre méthode. Vous auriez répondu quoi ?

1. Merci d'éviter les petites blagues du type « $a_1 = A$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ »...

3 Des polynômes orthogonaux (Grégor Vindry (2015) et Laura Ahunon (2016))

On définit $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

1. (a) Calculer P_n pour $n \leqslant 8$.
   (b) Conjecturer le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n. Comment ferait-on pour prouver ces résultats ?
2. On pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_8[X], \qquad <P|Q>= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}dt$$

   (a) Vérifier rapidement qu'on a bien défini ainsi un produit scalaire.
   (b) Calculer $<P_i|P_j>$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant 8$ (en constituer une matrice avec Python).
   (c) Que dire de $\mathcal{B} = (P_0, ..., P_8)$?
3. On pose $\Phi : P \longmapsto -3XP' + (1-X^2)P''$.
   (a) Vérifier qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_8[X]$; déterminer sa matrice dans $\mathcal{B}$.
   (b) Que peut-on en déduire sur Φ ?
   (c) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de Φ.
   (d) Retrouver le résultat de 3.(b) par une autre méthode.

Laura a eu 18/20. Plutôt heureuse d'avoir bossé sérieusement ce TP fait pendant la chauffe. À bon entendeur...

4 Un arc paramétré (Sébastien Pezza)

On s'intéresse ici à l'arc paramétré

$$\varphi(t) \begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

1. Tracer cet arc avec Python.
2. Expliciter puis prouver la symétrie observée.
3. Déterminer les branches asymptotiques.
4. Calculer la longueur de la boucle observée.
5. Trouver une équation cartésienne de la courbe, de la forme $F(x, y) = 0$.
6. Montrer que $\varphi(t_1)$, $\varphi(t_2)$ et $\varphi(t_3)$ sont alignés si et seulement si $t_1t_2t_3 = -1$.

L'oral s'est très mal passé (une demi-heure passée à faire un DL pendant la préparation).

5 Des intégrales et des rationnels (Pauline Charmet)

Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on définit $u_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

1. (a) Calculer $u_{m,0}$ puis, pour $n > 0$, trouver une récurrence permettant de calculer $u_{m,n}$.
   (b) Écrire un programme permettant de calculer $u_{m,n}$ sous forme d'une fraction.
   On utilisera la bibliothèque adaptée :

```
>>> from fractions import Fraction
>>> a = Fraction(1, 3)
>>> a**2, 1+2*a
(Fraction(1, 9), Fraction(5, 3))
```

(c) Tester ce code pour différentes valeurs de (m, n), et comparer au résultat donné par intégration numérique via `quad`

2. (a) Montrer :

$$\int_0^1 \frac{x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 4}{4 + x^4(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 4)x^{4k}(1-x)^{4k} dx$$

(b) En déduire une expression de cette intégrale comme une combinaison linéaire de sommes de séries dont on estimera la vitesse de convergence.

(c) Comparer les valeurs approchées de cette intégrale obtenues via `quad` et comme somme partielle de séries.

Il y avait aussi des manipulations formelles de polynômes... mais la fin de l'exercice a été mal notée...

6 Quelques dessins

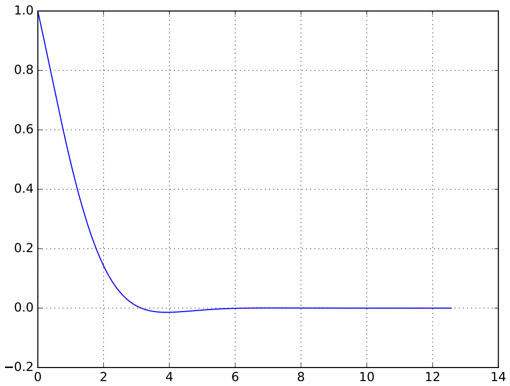

FIGURE 1 – Premier exercice : f décroît vite.

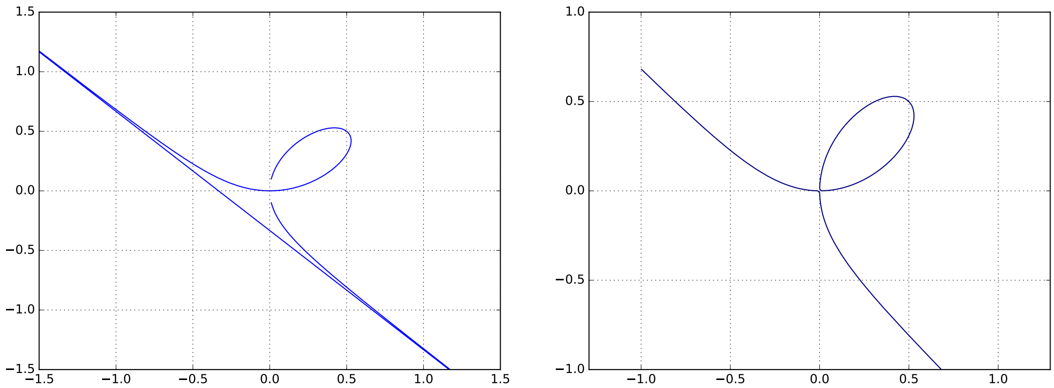

FIGURE 2 – Troisième exercice : tracé direct ou avec l'équation $X^3 + Y^3 = XY$