Chauffe Centrale – 1/3

Mercredi 24 mai 2017

Les énoncés reprennent des sujets posés à l'oral en 2016... et adaptés/débugués/enrichis un peu pour certains.

Howto

- Lisez ces énoncés avant le TP. Traitez les parties mathématiques et réfléchissez à la façon de programmer ceci ou cela ; quelles sont les fonctions/fonctionnalités que vous ne connaissez pas et au sujet desquelles il sera donc important de m'interroger le jour du TP ?
- Vous pouvez essayer de traiter complètement un exo (ou plus) que je regarderai le jour J.
- Vous pouvez(/devez) avoir sous les yeux les documents d'accompagnement de Centrale.
- Vous devez savoir faire un `plot` minimal sans avoir à consulter la moindre documentation !

1 Un spectre (récolte PC)

Pour tout réel t, on définit $M(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que les valeurs propres de $M(t)$ sont réelles. On les note $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$, avec :
$$\lambda_1(t) \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \lambda_3(t).$$
2. Écrire une fonction qui prend en entrée une liste de trois éléments (entiers ou flottants) et qui renvoie ces trois éléments dans une liste triée par ordre croissant.
3. Représenter sur un même graphe les graphes des applications λ_k, ainsi que la première bissectrice. Observer/conjecturer d'éventuelles symétries, propriétés.
4. Déterminer le polynôme caractéristique de $M(t)$.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\lambda_1(t) < -1 < \lambda_2(t) < 1 < \lambda_3(t)$$
6. Démontrer les propriétés conjecturées au vu des graphes (symétries, comportement asymptotique).

2 Une équation différentielle (Clarisse Debalme)

On définit sur $]-\infty, 1[$ l'application $f : x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}\cdot$

1. Montrer qu'il existe sur $]-\infty, 1[$ une unique solution g à l'équation différentielle $y' = f(x)y$ vérifiant $g(0) = 1$.
Tracer cette solution sur $[-3/2, 1[$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k}\cdot$$
Calculer (avec Python) les a_k, pour $0 \leqslant k \leqslant 10$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x < 1$: $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.
   (a) Tracer le graphe des S_n (pour $n \leqslant 10$) sur $[-3/2, 1]$ en superposition du graphe de g.
   (b) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est minoré par 1.
   (c) Montrer que g est développable en série entière, et déterminer ce développement.

NDLR : Clarisse a eu 17/20... en ayant pourtant galéré avec `odeint` *qu'elle ne maîtrisait pas.*

3 Des probabilités (Pierre Simon)

On fixe deux entiers strictement positifs a et b.
Une urne contient initialement b boules blanches et autant de noires.

On tire une boule.
— si c'est une noire, alors on s'arrête ;
— si c'est une blanche, on rajoute a boules blanches dans l'urne et on recommence.

On note B l'événement « le processus finit par s'arrêter » (i.e. : on finit par tomber sur une boule noire) ; pour $n \in \mathbb{N}$, A_n désigne l'événement « il y a eu au moins n boules blanches tirées » et enfin (pour $n \in \mathbb{N}^*$) C_n désigne l'événement « le n-ième tirage est une boule noire ».
On note enfin, pour $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ (avec donc $p_0 = 1$).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \dfrac{b + na}{2b + na} p_n$.
2. Écrire un programme prenant a et b en entrée et renvoyant les 10 premiers termes de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Faire une conjecture ; la démontrer.
   Indication : la série $\sum \ln \frac{p_{n+1}}{p_n}$ pourra être utile.
3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}*$, $\mathbb{P}(C_n)$ à l'aide des p_k.
4. Calculer $\mathbb{P}(B)$ à l'aide des p_n.
5. Écrire un programme prenant a et b en entrée, simulant les tirages, et renvoyant le rang auquel le processus s'arrête.
6. *Question ajoutée par mes soins :* Le rang X auquel le processus s'arrête possède-t-il une espérance finie ?

4 Des nombres premiers (RMS 1000)

On considère les polynômes $P = X^2 - X + 40$ et $T = X^2 - 79X + 1601$.

1. Soient $p = P(42)$ et $t = T(80)$. Écrire une suite d'instructions en Python pour vérifier que pour tout $k \in [\![-15, 15]\!]$, $P(42 + kp)$ est divisible par p et $T(80 + kt)$ est divisible par t.
2. Soient P un polynôme non constant à coefficients entiers, n et k dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $m = P(n)$ est non nul. Montrer que $P(n + km)$ est divisible par m.
   Indication : on pourra commencer par montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(n + km)^p - n^p$ est divisible par m.
3. (a) Écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel $n > 0$ et renvoie `True` si n est premier, et `False` sinon.
   On rappelle que $n \geqslant 2$ est premier si et seulement si pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$, le reste dans la division euclidienne de n par k est non nul.
   (b) Vérifier que pour tout $n \in [\![0, 40]\!]$ $P(n)$ est premier, ainsi que $T(n)$ pour tout $n \in [\![0, 79]\!]$.
   (c) Est-ce encore le cas[1] pour $P(41)$ et $T(80)$?
4. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme Q non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $|Q(n)|$ soit premier pour tout entier naturel n.

1. Suspens...