Quelques idées sur les graphes

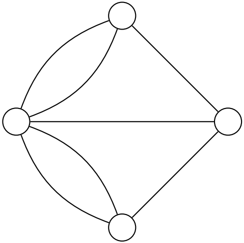
stephane@gonnord.org – http://blog.psi945.fr

Lundi 30 janvier 2017

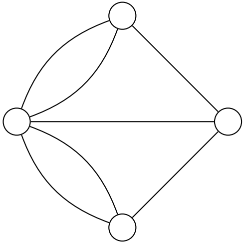
Plan

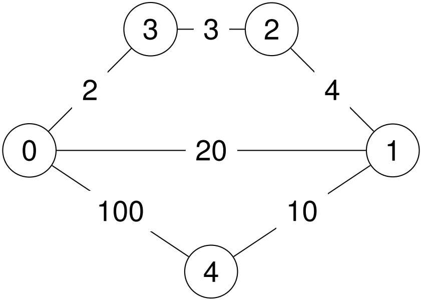
Sommaire

Des tas de graphes

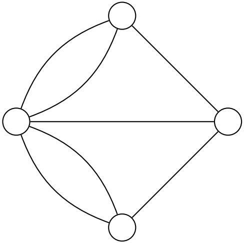


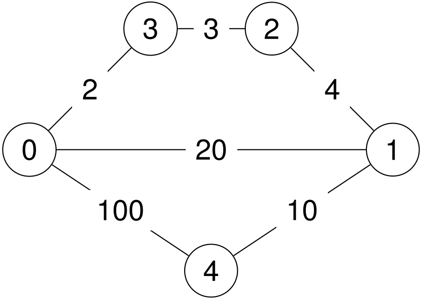
Des tas de graphes





Des tas de graphes





- Sommets et arêtes.
- Valués ou non.
- Orientés ou non.

Sommaire

Matrice vs. liste d’adjacence

- Liste d’adjacence : chacun connaît ses voisins.
- Matrice d’adjacence : toutes les transitions/distances directes.
- Complexités spatiales différentes.

Matrice vs. liste d'adjacence

- Liste d'adjacence : chacun connaît ses voisins.
- Matrice d'adjacence : toutes les transitions/distances directes.
- Complexités spatiales différentes.
- Lien entre $|\mathcal{A}|$ et $|\mathcal{S}|$?

Matrice vs. liste d'adjacence

- Liste d'adjacence : chacun connaît ses voisins.
- Matrice d'adjacence : toutes les transitions/distances directes.
- Complexités spatiales différentes.
- Lien entre $|\mathcal{A}|$ et $|\mathcal{S}|$?
  - Toujours :

$$|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{S}|^2$$

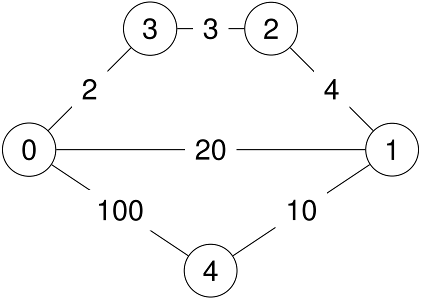
Matrice vs. liste d'adjacence

- Liste d'adjacence : chacun connaît ses voisins.
- Matrice d'adjacence : toutes les transitions/distances directes.
- Complexités spatiales différentes.
- Lien entre $|\mathcal{A}|$ et $|\mathcal{S}|$?
  - Toujours :
    $$|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{S}|^2$$
  - Connexes :
    $$|\mathcal{S}| - 1 \leq |\mathcal{A}|$$

Matrice vs. liste d'adjacence

- Liste d'adjacence : chacun connaît ses voisins.
- Matrice d'adjacence : toutes les transitions/distances directes.
- Complexités spatiales différentes.
- Lien entre $|\mathcal{A}|$ et $|\mathcal{S}|$?
  - Toujours :
    $$|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{S}|^2$$
  - Connexes :
    $$|\mathcal{S}| - 1 \leq |\mathcal{A}|$$
  - Planaires :
    $$|\mathcal{A}| \leq 3|\mathcal{S}| - 6$$

Le problème



Distance entre...

- deux sommets ;
- ou bien tous les couples de sommets.

Sommaire

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus** k **arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ?

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$G = \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$G = \begin{pmatrix} \color{red}{\infty} & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \color{red}{\infty} & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \color{red}{\infty} & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \color{red}{\infty} & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \color{red}{\infty} \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, \ldots, n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 102 \\ 30 & 10 & 14 & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 30 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & \color{red}{30} \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ \color{red}{30} & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \;\middle|\; 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Une première solution ($\mathcal{S} = \{0, ..., n-1\}$)

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $M_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **pour des chemins d'au plus k arêtes**.
- Fastoche :

$$M_{i,j}^{(k)} = \min\left(M_{i,j}^{(k-1)}, \min\left\{M_{i,\ell}^{(k-1)} + G_{\ell,j} \mid 0 \leq \ell \leq n-1\right\}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^4$

$$M^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Sommaire

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ?

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$G = \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$G = \begin{pmatrix} \infty & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \infty & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} \color{red}{0} & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & \color{red}{0} & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & \color{red}{0} & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & \color{red}{0} & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & \color{red}{0} \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ 100 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & \color{red}{22} & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & \color{red}{22} & 3 & 0 & \color{red}{102} \\ 100 & 10 & \infty & \color{red}{102} & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & \infty & 2 & 100 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ \infty & 4 & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 102 \\ 100 & 10 & \infty & 102 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 22 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 22 & 3 & 0 & 32 \\ 30 & 10 & 14 & 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 24 & 2 & 30 \\ 20 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 24 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 30 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i, j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \color{red}{20} & \color{red}{24} & 2 & \color{red}{30} \\ \color{red}{20} & 0 & 4 & 7 & 10 \\ \color{red}{24} & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ \color{red}{30} & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Floyd-Warshall

- Idée : pour $(i,j) \in \mathcal{S}^2$ et $1 \leq k \leq |S| - 1$, calculer $N_{i,j}^{(k)}$ la distance de i à j **avec des sommets intermédiaires** $< k$ (oui, strictement !).
- Fastoche :

$$N_{i,j}^{(k)} = \min\left(N_{i,j}^{(k-1)}, N_{i,k-1}^{(k-1)} + N_{k-1,j}^{(k-1)}\right)$$

- Complexité ? $|\mathcal{S}|^3$

$$N^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & 2 & 19 \\ 9 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 14 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 17 \\ 19 & 10 & 14 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

Sommaire

Algorithme de Dijkstra

- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}_1$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{S}_2$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}_1$

Algorithme de Dijkstra

- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}_1$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{S}_2$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}_1$
- À chaque étape, on choisit s_1 le sommet de $\mathcal{S}_2$ à plus petite distance de s_0.
  - on le bascule dans $\mathcal{S}_1$;
  - pour chacune de ses arêtes (s_1, s_2) avec $s_3 \in \mathcal{S}_2$, on met à jour la nouvelle distance de s_2 à s_0 via $\mathcal{S}_1$.

Algorithme de Dijkstra

- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}_1$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{S}_2$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}_1$
- À chaque étape, on choisit s_1 le sommet de $\mathcal{S}_2$ à plus petite distance de s_0.
  - on le bascule dans $\mathcal{S}_1$;
  - pour chacune de ses arêtes (s_1, s_2) avec $s_3 \in \mathcal{S}_2$, on met à jour la nouvelle distance de s_2 à s_0 via $\mathcal{S}_1$.
- Complexité ?

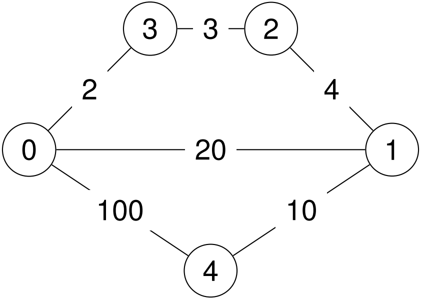
Algorithme de Dijkstra

- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}_1$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{S}_2$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}_1$
- À chaque étape, on choisit s_1 le sommet de $\mathcal{S}_2$ à plus petite distance de s_0.
  - on le bascule dans $\mathcal{S}_1$;
  - pour chacune de ses arêtes (s_1, s_2) avec $s_3 \in \mathcal{S}_2$, on met à jour la nouvelle distance de s_2 à s_0 via $\mathcal{S}_1$.
- Complexité ?
  - $|\mathcal{S}|^2$ avec matrice d'adjacence...

Algorithme de Dijkstra

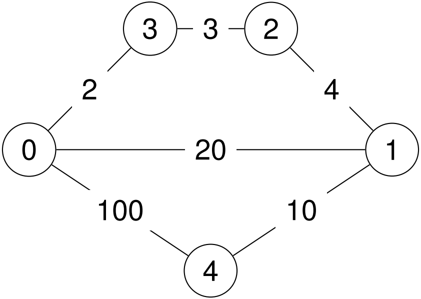
- Distances à UN sommet s_0
- Idée : partition $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ qui grossit.
  - la distance des $s \in \mathcal{S}_1$ à s_0 est connue.
  - pour $s \in \mathcal{S}_2$, on connaît la distance à s_0 via $\mathcal{S}_1$
- À chaque étape, on choisit s_1 le sommet de $\mathcal{S}_2$ à plus petite distance de s_0.
  - on le bascule dans $\mathcal{S}_1$;
  - pour chacune de ses arêtes (s_1, s_2) avec $s_3 \in \mathcal{S}_2$, on met à jour la nouvelle distance de s_2 à s_0 via $\mathcal{S}_1$.
- Complexité ?
  - $|\mathcal{S}|^2$ avec matrice d'adjacence...
  - ou $|\mathcal{A}| \ln |\mathcal{A}|$ avec liste d'adjacence et tas.

Et sur notre exemple...



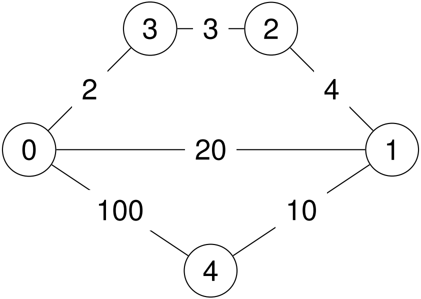
$\mathcal{S}_1$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100

Et sur notre exemple...



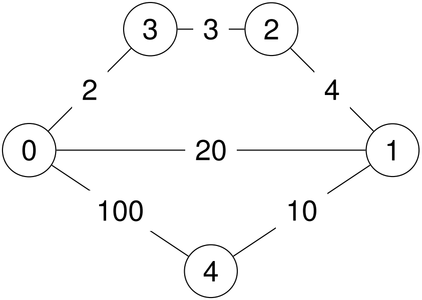
$\mathcal{S}_1$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100

Et sur notre exemple...



$\mathcal{S}_1$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100
$\{0,3,2\}$	0	$\boxed{9}$	5	2	100

Et sur notre exemple...



$\mathcal{S}_1$	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
$\{0\}$	0	20	∞	$\boxed{2}$	100
$\{0,3\}$	0	20	$\boxed{5}$	2	100
$\{0,3,2\}$	0	$\boxed{9}$	5	2	100
$\{0,3,2,1\}$	0	9	5	2	19

C’est fini ! Merci de votre attention