Des réductions explicites

Les calculs ont tous été faits à la main (si, vraiment !) sur les deux premières parties. Je mets dans ce corrigé les calculs faits avec Maple, logiciel de calcul formel bien pratique dans ce type de situations...

1 Une diagonalisation

1. On peut résoudre directement $AX = \lambda X$, en pivotant intelligemment puis en discutant (presque toujours, il n'y a que la solution nulle $X = 0$, et ce sont les autres cas qui nous intéressent). De façon plus automatique, qui fatigue moins le cerveau, on peut commencer par calculer le polynôme caractéristique :

```
> factor(CharacteristicPolynomial(A,X));
```

$$(X-1)(X+2)(X+1)$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}}$$

On sait dès maintenant que u est diagonalisable (3 valeurs propres en dimension 3 ; ou encore polynôme caractéristique scindé *à racines simples*). On cherche des vecteurs propres en résolvant trois systèmes (et bien entendu, on ne *suppose pas* $AX = -2X$, si on veut *résoudre* cette équation... mais ça vous le savez depuis longtemps[1]). On trouve alors $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_1)$, $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_2)$ et $\mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_3)$, avec respectivement $f_1 = (-1, -1, 1)$, $f_2 = (2, 3, -3)$ et $f_3 = (-3, -5, 6)$.

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{3} \\ -1 & \frac{-5}{6} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ de vecteurs propres précédemment trouvée[2]. La formule de changement de base pour u nous dit que $P^{-1}AP$ vaut la matrice de u dans la base $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \text{ on a } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

```
> P:=Matrix([[-1,2,-3],[-1,3,-5],[1,-3,6]]):P**(-1).A.P;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Vous devez savoir faire ça... et « si possible » sans résoudre un système de 9 équations à 9 inconnues !

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

1. ...
2. On rappelle que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes constituent une famille libre ; autre façon d'exprimer le fait que les sommes de sous-espaces propres distincts sont directes.

4. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, il s'agit de résoudre $X' = AX$, c'est-à-dire $X' = PDP^{-1}X$, soit encore $P^{-1}X' = DP^{-1}X$. En posant $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, on a alors[3] $Y' = P^{-1}X'$. Ainsi, le système initial $X' = AX$ est *équivalent* à $Y' = DY$ (et si à un moment on avait *supposé* $X' = AX$, alors on aurait perdu l'équivalence, mais est-ce utile de le rappeler ?). Le système $Y' = DY$ est constitué de trois équations différentielles de la forme $z' = \alpha z$ dont les solutions sont connues. On revient ensuite aux inconnues initiales via $X = PY$:

$$\boxed{\text{Les solutions recherchées sont les } t \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \mathrm{e}^{t} \\ K_2 \mathrm{e}^{-t} \\ K_3 \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \text{ où } K_1, K_2 \text{ et } K_3 \text{ décrivent } \mathbb{R}.}$$

5. (a) Simple calcul à faire soigneusement...

$$\boxed{(MD - DM)_{i,j} = (\lambda_j - \lambda_i) m_{i,j}.}$$

(b) On aura $MD = DM$ si et seulement si pour tout i, j, $(\lambda_j - \lambda_i) m_{i,j} = 0$. Cette équation est modérément informative lorsque $i = j$, mais est équivalente à $m_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$ (car les λ_i sont distincts deux à deux). Bref :

$$\boxed{MD = DM \text{ si et seulement si } D \text{ est diagonale.}}$$

(c) Bien évidemment, on relie le commutant de A et celui de D :

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{C}(A) &\iff NA = AN \iff N(PDP^{-1}) = (PDP^{-1})N \iff NPDP^{-1} = PDP^{-1}N \\ &\iff P^{-1}NPDP^{-1} = DP^{-1}N \iff P^{-1}NPD = DP^{-1}NP \\ &\iff (P^{-1}NP)D = D(P^{-1}NP) \iff P^{-1}NP \in \mathcal{C}(D) \end{aligned}$$

Bref : N commute avec A si et seulement si $P^{-1}NP$ est diagonale.

$$\boxed{\text{Les matrices qui commutent avec } A \text{ sont celles de la forme } PD'P^{-1}, \text{ avec } D' \text{ diagonale.}}$$

Voici la version géométrique, via une analyse-synthèse :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'application canoniquement associée à M, de sorte que $AM = MA$ si et seulement si $u \circ f = f \circ u$.

— Supposons : $AM = MA$. On a alors $u \circ f = f \circ u$, donc les sous-espaces propres de u sont stables par f, donc pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $f(f_i)$ est de la forme $\alpha_i f_i$, donc la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est diagonale, donc, d'après la formule de changement de base pour f : M est de la forme $P.D'.P^{-1}$ avec D' une matrice diagonale.

— Réciproquement, si $M = P.D'.P^{-1}$ avec D' une matrice diagonale, alors (puisque les matrices diagonales commutent)

$$AM = (PDP^{-1})(PD'P^{-1}) = PDD'P^{-1} = PD'DP^{-1} = (PD'P^{-1})(PDP^{-1}) = MA.$$

6. Supposons : $M^3 = A$. On a alors $AM = M^3M = MM^3 = MA$, donc d'après la question précédente, il existe D' diagonale telle que $M = PD'P^{-1}$. La relation $M^3 = A$ fournit alors $PD'^3P^{-1} = PDP^{-1}$, donc $D'^3 = D$, puis (l'application $x \mapsto x^3$ réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même) ; $D' = \mathrm{Diag}(1, -1, -\sqrt[3]{2})$.
Réciproquement, la matrice $M = P\mathrm{Diag}(1, -1, -\sqrt[3]{2})P^{-1}$ vérifie bien :

$$M^3 = P\mathrm{Diag}(1, -1, -\sqrt[3]{2})^3 P^{-1} = P\mathrm{Diag}(1, -1, -2)P^{-1} = A.$$

$$\boxed{\text{L'équation } M^3 = A \text{ possède pour unique solution } P.\mathrm{Diag}(1, -1, \sqrt[3]{2}).P^{-1}}$$

```
> M:=P.DiagonalMatrix([1,-1,-2**(1/3)]).P**(-1):
  M,simplify(M**3);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & -9 + 3.2^{1/3} & -5 + 3.2^{1/3} \\ 6 & -12 + 5.2^{1/3} & -7 + 5.2^{1/3} \\ -6 & 12 - 6.2^{1/3} & 7 - 6.2^{1/3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ -6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3. ben oui... Pas convaincus ? Calculez d'une part Y' et d'autre part $P^{-1}X'$. Vous pouvez aussi classer ça dans la boîte « choses mystérieuses », mais ce serait dommage

2 Une trigonalisation

1. Piece of cake...

```
> factor(CharacteristicPolynomial(B,X));
```

$$(X+1)(X-2)^2$$

Pour faire ce calcul à la main, j'ai réalisé l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis ai factorisé $X+1$, réalisé l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, puis développé par rapport à la dernière ligne...

Pour changer, on peut demander les sous-espaces propres comme ceci (les résultats renvoyés sont des bases des noyaux) :

```
> NullSpace(B+1),NullSpace(B-2);
```

$$\left\{\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-5}{6} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

On reconnaît $\frac{1}{6}f_3$ et f_1 (et maple nous dit que $\operatorname{Ker}(B-2I_3)$ est de dimension 1).

$$\boxed{\operatorname{Sp}(v)=\{-1,2\},\ \operatorname{Ker}(v+\operatorname{Id}_E)=\operatorname{Vect}(f_3) \text{ et } \operatorname{Ker}(v-2\operatorname{Id}_E)=\operatorname{Vect}(f_1).}$$

2. On dispose déjà des relations $v(f_1)=2f_1$ et $v(f_3)=-f_3$. On cherche maintenant un vecteur w tel que $v(w)=f_1+2w$.
   - On peut travailler matriciellement via $BW=F_1+2W$:

     ```
     > W:=<a,b,c>:solve({seq((B.W-2*W-Column(P,1))[i],i=1..3)});
     ```

     $$\{c=-b, a=1+b, b=b\}$$

     Il **suffit** donc de prendre $w=(2,1,-1)$. Vérifions :

     ```
     > Q:=Matrix([[-1,2,-3],[-1,1,-5],[1,-1,6]]):Q**(-1).B.Q;
     ```

     $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   - On peut aussi faire une analyse fine de la psychologie élaborée de l'auteur du sujet, et obtenir ainsi une petite idée d'un candidat solution...

     ```
     > Q:=Matrix([[-1,2,-3],[-1,3,-5],[1,-3,6]]):Q**(-1).B.Q;
     ```

     $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

     CARAMBA, raté !

     ```
     > Q:=Matrix([[-1,-2,-3],[-1,-3,-5],[1,3,6]]):Q**(-1).B.Q;
     ```

     $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

     Il n'était pas nécessaire d'aller chercher bien loin...

$$\boxed{\text{Il suffit de prendre } Q=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \text{ ou encore } Q=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}$$

(On prend la deuxième solution dans la suite.)

3. Bon, on reprend évidemment l'attaque vue dans la partie précédente : en notant $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y=Q^{-1}X=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, le système différentiel proposé se traduit $Y'=TY$, en notant $T=Q^{-1}BQ$,

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y_1' & = & 2y_1 + y_2 \\ y_2' & = & 2y_2 \\ y_3' & = & -y_3 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'existence de deux constantes réelles K_2 et K_3 telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = K_2 \mathrm{e}^{2t}$, $y_3(t) = K_3 \mathrm{e}^{-t}$ et $y_1'(t) = 2y_1(t) + K_2 \mathrm{e}^{2t}$. La méthode de la variation de la constante nous donne UNE solution puis LES solutions de cette dernière équation (à K_2 fixé) :

```
> dsolve(D(y1)(t)=2*y1(t)+K2*exp(2*t),y1(t));
```

$$y1(t) = (K_2 t + \_C1)\mathrm{e}^{(2t)}$$

Les solutions de $Y' = TY$ sont donc les $t \mapsto \begin{pmatrix} (K_1 + K_2 t)\mathrm{e}^{2t} \\ K_2 \mathrm{e}^{2t} \\ K_3 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$, et enfin :

$$\boxed{\text{Les fonctions recherchées sont celles de la forme } t \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (K_1 + K_2 t)\mathrm{e}^{2t} \\ K_2 \mathrm{e}^{2t} \\ K_3 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}}$$

4. — **Version gros-bourrin :** pour M générique,on calcule $MT - TM$: c'est nul si et seulement si M est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. On récupère alors les matrices commutant avec QTQ^{-1} avec le même procédé que dans la première partie.
   — **Version géométrique :** Ça va ressembler au travail fait dans la première partie (version géométrique), à ceci près qu'on ne dispose que de *deux* droites qui sont stables par f canoniquement associé à M censé commuter avec B. On obtient un plan stable en considérant $\mathrm{Ker}\left((v - 2\mathrm{Id}_E)^2\right)$: en tant que noyau d'un polynôme en v, il est certes stable par v, mais aussi par tout endomorphisme commutant avec v, donc f. Comme ce noyau est $\mathrm{Vect}(f_1, w) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, la matrice de f dans la base de trigonalisation de v est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$.

   Dans la synthèse, il reste à voir quand une telle matrice commute avec T. C'est le cas si et seulement si (simple calcul !) $\alpha + 2\beta = 2\beta + \gamma$, c'est-à-dire $\alpha = \gamma$.

$$\boxed{\text{Les matrices commutant avec } B \text{ sont celles de la forme } Q \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} Q^{-1}, \text{ où } \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}.}$$

```
> M:=Q.Matrix([[alpha,beta,0],[0,alpha,0],[0,0,delta]]).Q**(-1):
  simplify(B.M-M.B);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voici un bel argument nos assurant que $\alpha = \gamma$: si ce n'était pas le cas, f serait diagonalisable (trois valeurs propres distinctes). Mais puisque u et f commutent, en retournant l'argument, on aurait la matrice de u dans une base de diagonalisation de f... qui serait diagonale, ce qui est absurde car u n'est pas diagonalisable ! (pourquoi au fait ?)

5. Gnagna analyse... blabla... commutent... gnagna... nécessairement $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$... synthèse... pifpaf... $\begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2\beta & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^3 \end{pmatrix}$... blabla nouvelles conditions nécessaires... gnagna réciproquement... blabla... ça marche.

$$\boxed{\text{L'équation } M^3 = B \text{ possède pour unique solution } Q \begin{pmatrix} 2^{1/3} & \dfrac{2^{-2/3}}{3} & 0 \\ 0 & 2^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}}$$

```
> alpha:=2**(1/3):beta:=1/(3*alpha**2):delta:=-1:
  simplify(Q.(Matrix([[alpha,beta,0],[0,alpha,0],[0,0,delta]])**3).Q**(-1));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 11 \\ -1 & 20 & 17 \\ 1 & -21 & -18 \end{bmatrix}$$

3 Des sous-espaces stables

1. (a) Si une droite $D = \text{Vect}(f)$ ($f \neq 0$) est stable par w, alors $w(f) \in D$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w(f) = \lambda f$, donc f (qui est non nul[4]) est vecteur propre de w.
   Réciproquement, si une droite est dirigée par un vecteur propre de w, alors elle est bien stable par w.

   $$\boxed{\text{Les droites stables par } E \text{ sont celles dirigées par des vecteurs propres de } w}$$

   (b) Si $F = \text{Ker}\,(w - \lambda \text{Id}_E)$, alors pour tout $x \in F$, on a $w(x) = \lambda x \in F$, donc F est effectivement stable par w.

   $$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } w \text{ sont stables par } w.}$$

   On évitera[5] les arguments overkill *du type « w commute avec w, donc les sous-espaces propres du premier sont stables par le second »...*

   (c) Fixons $i \in [\![1, k]\!]$ et notons $P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Soit $x \in F_i = \text{Ker}\,(P_i(w))$ et montrons que $w(x) \in F_i$.
   Il s'agit de montrer que $(P_i(w))\,(w(x)) = 0$. Or :

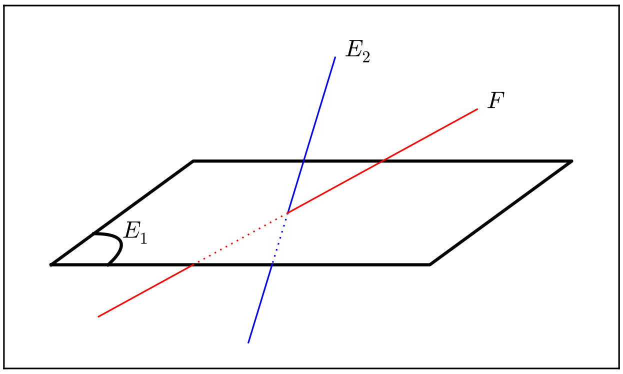
   $$(P_i(w))\,(w(x)) = (P_i(w) \circ w)\,(x) = ((P_i X)(w))\,(x) = ((X P_i)(w))\,(x) = (w \circ P_i(w))\,(x) = w\left(\underbrace{P_i(w)(x)}_{=0}\right),$$

   et on a bien $w(x) \in \text{Ker}\ (P_i(w)) = F_i$.

   $$\boxed{\text{Les sous-espaces caractéristiques de } w \text{ sont stables par } w.}$$

   Pour ceux n'ayant pas compris le calcul précédent : écrivez $P_i = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$, puis $P_i(w) = \cdots$ puis $P_i(w)(w(x)) = \cdots$, etc.

2. Il suffit de faire en sorte que F intersecte trivialement E_1 et E_2 :



4. Mais je sais bien que vous savez tous qu'un vecteur propre est non nul... Soupirs...
5. Et je devine les sourires de certains : « Mince, il avait anticipé ! ». Ben ouais, désolé...

3. (a) L'inclusion [6]

$$\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(w)} \left(F\cap \mathrm{Ker}\,(w-\lambda \mathrm{Id}_E)\right) \subset F$$

ne pose guère de problème... Mais la réciproque un peu plus ! Par hypothèse, on a

$$E=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(w)} \mathrm{Ker}\,(w-\lambda \mathrm{Id}_E)=\bigoplus_{i=1}^{k}\mathrm{Ker}\,(w-\lambda_i \mathrm{Id}_E),$$

donc tout $x\in E$ peut se décomposer sous la forme $x=x_1+\cdots+x_k$, avec $x_i\in \mathrm{Ker}\,(w-\lambda_i\mathrm{Id}_E)$. Le drame, c'est que si on prend $x\in F$, on ne peut absolument pas être certain que les x_i sont dans F (ce qu'on souhaiterait pourtant, pour écrire x selon la somme des $F\cap\mathrm{Ker}\,(w-\lambda_i\mathrm{Id}_E)$).

Le résultat admis dans l'énoncé nous donne l'existence de polynômes $P_1,\ldots,P_k\in\mathbb{R}[X]$ tels que, avec les notations précédentes, $x_i=(P_i(w))\,(x)$.

Or F est stable par w, donc par ses itérés, puis par les polynômes en w, donc par les projections $P_i(w)$. Ainsi, chaque x_i est dans F, donc dans $F\cap\mathrm{Ker}\,(w-\lambda_i\mathrm{Id}_E)$, et ainsi :

$$F\subset \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(w)} \left(F\cap \mathrm{Ker}\,(w-\lambda \mathrm{Id}_E)\right).$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Sous les hypothèses de la question, } F=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(w)} \left(F\cap \mathrm{Ker}\,(w-\lambda \mathrm{Id}_E)\right).}$$

(b) D'après la question précédente, si F est stable par u (qui est diagonalisable), alors F est somme de sous-espaces des sous-espaces propres. Mais réciproquement, les sous-espaces des sous-espaces propres sont stables par u, donc leurs sommes aussi.

On est donc ramené à déterminer toutes les sommes possibles, sachant que chaque sous-espace de sous-espace propre est ici soit $\{0\}$ soit le sous-espace propre lui-même. Ça revient également à choisir une sous-famille de $\mathcal{F}=(f_1,f_2,f_3)$ qui en constituera une base. Il y a $2^3=8$ possibilités :
— les deux sous-espaces triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$;
— les trois droites $\mathrm{Vect}(f_1)$, $\mathrm{Vect}(f_2)$ et $\mathrm{Vect}(f_3)$;
— les trois plans $\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$, $\mathrm{Vect}(f_1,f_3)$ et $\mathrm{Vect}(f_2,f_3)$.

$$\boxed{\text{Il y a huit sous-espaces de } \mathbb{R}^3 \text{ stables par } u.}$$

4. (a) C'est essentiellement la même chose qu'à la question 3a : E est somme (directe) de ses sous-espaces caractéristiques, et les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en w, donc F, qui est stable par w, l'est également par ces projecteurs, ce qui permet d'établir l'inclusion non triviale (avec les notations naturelles) :

$$F\subset\bigoplus_{i=1}^{k}\left(F\cap\mathrm{Ker}\,\left((w-\lambda_i\mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right)\right).$$

$$\boxed{F \text{ est la somme de ses intersections avec les sous-espaces caractéristiques de } w.}$$

(b) D'après ce qui précède, les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par v sont DES sommes de sous-espaces de $\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ et de $\mathrm{Vect}(f_3)$. Mais attention, la réciproque est fausse : $\mathrm{Vect}(f_2)$ n'est par exemple pas stable par v. En fait, si F est stable par v, on aura également $F\cap\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ stable par v. Cette intersection est soit triviale, soit égale à une droite... qui doit être dirigée par un vecteur propre (question 1a) : ce ne peut être que $\mathrm{Vect}(f_1)$ (qui, réciproquement, est effectivement stable par v !).

On va donc combiner respectivement trois et deux sous-espaces des sous-espaces caractéristiques, pour obtenir tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par v. On trouve :

6. La somme est directe bien entendu... Pourquoi au fait ?

— les deux sous-espaces triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$;
— les droites $\mathrm{Vect}(f_1)$ et $\mathrm{Vect}(f_3)$;
— les plans $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ et $\mathrm{Vect}(f_1, f_3)$.

$$\boxed{\text{Il y a six sous-espaces de } \mathbb{R}^3 \text{ stables par } v.}$$

5. L'application w canoniquement associée à C a pour polynôme caractéristique

$$\chi_w = (X-2)^2(X+3)(X-4)^2$$

et n'est pas diagonalisable ($\mathrm{Ker}\,(w - 2\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1). Puisque χ_w est scindé, les sous-espaces recherchés sont les sommes de leurs intersections avec les sous-espaces caractéristiques ; lesquelles intersections doivent être des sous-espaces stables par w.
— Pour le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}\,((w-2\mathrm{Id}_E)^2)$, il y a comme plus haut les deux triviaux et $\mathrm{Vect}(e_1)$.
— Pour le sous-espace caractéristique (et propre) $\mathrm{Ker}\,(w + 3\mathrm{Id}_E)$, il y a les deux triviaux.
— Pour le sous-espace caractéristique et propre $\mathrm{Ker}\,((w-4\mathrm{Id}_E)^2) = \mathrm{Ker}\,(w-4\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$, il y a les deux triviaux, et toute droite de ce sous-espace (soit donc une infinité).
En combinant ces différentes possibilités, on trouve comme sous-espace de $\mathbb{R}^5$ stables par w :
— les deux sous-espaces triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}^5$;
— les droites $\mathrm{Vect}(e_1)$, $\mathrm{Vect}(e_3)$, et celles incluses dans $\mathrm{Vect}(e_4, e_5)$;
— les plans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, $\Pi = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$, $\mathrm{Vect}(e_1, f)$ et $\mathrm{Vect}(e_3, f)$ avec f non nul appartenant à Π ;
— les sous-espaces de dimension trois $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_1) + \Pi$, $\mathrm{Vect}(e_3) + \Pi$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, f)$ et $\mathrm{Vect}(e_1, e_3, f)$ avec f non nul appartenant à Π ;
— les hyperplans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_4, e_5)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_4, e_5)$ et $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, f)$ avec f non nul appartenant à Π.

$$\boxed{\text{Il y a plein de sous-espaces de } \mathbb{R}^5 \text{ stables par } w\,!}$$

4 Toi aussi tu peux jouer avec tes amis

1. Si T est une matrice triangulaire à coefficients entiers avec des 1 (ou -1) sur la diagonale, alors elle est inversible... d'inverse à coefficients entiers. On peut le voir de différentes façons :
— penser à ce qu'on fait quand on calcule son inverse via la résolution de $TX = Y$ (visualiser les équations, et les premières étapes de leur résolution) ;
— écrire $T = I + N$ avec N nilpotente. On a alors

$$(I+N)(I - N + N^2 - N^3 ... + (-1)^{n-1}N^{n-1}) = I + (-1)^{n-1}N^n = I,$$

donc $T = I + N$ est inversible, et son inverse $I - N + N^2 - N^3 ... + (-1)^{n-1}N^{n-1}$ est bien à coefficients entiers ;
— ...
Ainsi, en prenant T_1 (respectivement T_2) triangulaire supérieure (respectivement inférieure) à coefficients entiers avec des 1 sur la diagonale (par exemple avec $T_2 = {}^tT_1\,!$), on est certain que T_1 et T_2 sont inversibles, d'inverse à coefficients entiers. Il en ira de même pour leur produit. Si T_1 et T_2 sont « assez remplies » (de machins non nuls !), on peut raisonnablement espérer que T_1T_2 n'aura pas trop de zéros. On peut même s'en assurer, pour peu qu'on impose des éléments strictement positifs dans le bon triangle...

```
> T1:=Matrix([[1,1,-1],[0,1,-1],[0,0,1]]):P:=Transpose(T1).T1.T1:
  T1,P,P**(-1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Faire de telles matrices, c'est fastoche.}}$$

2. On va bien entendu prendre une matrice semblable à celle proposée... via une matrice de la forme précédente (ce qui nous assurera que les coefficients sont entiers) :

```
> S:=Matrix([[-2,1,0,0,0,0],[0,-2,1,0,0,0],[0,0,-2,0,0,0],[0,0,0,3,0,0],[0,0,0,0,4,1],
  [0,0,0,0,0,4]]):
  T:=Matrix(6,6,(i,j)->if i<=j then 1+j-i else 0 fi): P:=Transpose(T).T: G:=P.S.P**(-1):
  P,G;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 & 32 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 & 70 \\ 6 & 17 & 32 & 50 & 70 & 91 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 18 & -42 & 34 & -10 & 1 \\ -3 & 45 & -114 & 92 & -27 & 3 \\ -4 & 86 & -210 & 165 & -48 & 6 \\ -5 & 130 & -310 & 238 & -69 & 10 \\ -6 & 174 & -406 & 304 & -88 & 15 \\ -7 & 218 & -502 & 374 & -115 & 24 \end{bmatrix}$$

3. Si l'objectif S est fourni, on est ramené à chercher une base de $\mathbb{R}^6$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme g canoniquement associé à G aura pour matrice S. Une bonne connaissance des matrices de ce type nous donne des conditions nécessaires simples sur cette base, ce qui guide vers les choix suivants :
— on prend f_4 vecteur propre associé à la valeur propre 3 ;
— on choisit f_6 dans $\mathrm{Ker}\ ((g - 4\mathrm{Id}_E))^2 \setminus \mathrm{Ker}\ (g - 4\mathrm{Id}_E)$ puis on pose $f_5 = g(f_6) - 4f_3$;
— on fixe f_3 dans $\mathrm{Ker}\ ((g + 2\mathrm{Id}_E))^3 \setminus \mathrm{Ker}\ ((g + 2\mathrm{Id}_E))^2$ puis en prend $f_2 = g(f_3) + 2f_3$ et $f_1 = f(f_2) + 2f_2$.
Si tout se passe bien, on doit alors avoir une base (et la matrice de g dans cette base sera alors S par construction !)

```
> NullSpace(G-3),NullSpace(G-4),NullSpace(G+2);
```

$$\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{25} \\ \frac{11}{50} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{13}{35} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{11}{14} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

```
> f4:=%[1][1]:
> bases:=NullSpace((G-4)**2),NullSpace((G+2)**2),NullSpace((G+2)**3);
```

$$bases := \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{21} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ -\frac{10}{21} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

```
> f6:=bases[1][1]: f5:=G.f6-4*f6:
  f3:=bases[3][1]: f2:=G.f3+2*f3: f1:=G.f2+2*f2:
```

```
> P:=Matrix([f1,f2,f3,f4,f5,f6]):
  Determinant(P),P**(-1).G.P;
```

$$\frac{128}{225}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Bingo.}}$

4. Rien de très nouveau ici... mais tout de même un peu !
   - Pour le système différentiel, on doit faire trois variations de la constante (dont deux « en série »).
   - Pour le commutant, on trouvera un espace de dimension 6. Par exemple (après restriction), les matrices commutant avec $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ sont celles de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
   - L'équation $M^3 = G$ possède une unique solution.
   - Pour les sous-espaces de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ stables par g, il n'y a que les triviaux, $\mathrm{Vect}(f_1)$ et $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$: discuter sur la dimension. Si un plan stable n'est pas égal à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, alors il contient un vecteur dont l'écriture dans la base (f_1, f_2, f_3) possède une composante non nulle selon f_3. La famille $\big(f_3, g(f_3), g^3(f_3)\big)$ est alors échelonnée (dans la base (f_1, f_2, f_3)) donc libre...