Le 2 décembre 2017 – 4 heures

(Allez tout de suite voir la dernière partie, en fin d'énoncé...)

1 D'après CCP 2011 – TSI 1

1. Montrer que les trois séries entières $\sum x^n$, $\sum \sqrt{n}x^n$ et $\sum nx^n$ ont chacune un rayon de convergence égal à 1.
   On pose désormais :
   $$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^n, \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$
   On aura noté que les trois sommes sont indexées à partir de $n = 1$.
2. Rappeler sans démonstration une expression simple de $f(x)$, pour $x \in]-1,1[$.
   En déduire *en citant précisément le théorème de cours utilisé* une expression simple de $h(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
3. (a) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $[0,1[$.
   (b) Minorer $g(x)$, pour $x \in [0,1[$; en déduire : $g(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
   (c) Donner l'allure du graphe de g sur l'intervalle $[0,1[$; on précisera en particulier la tangente à l'origine, et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1[$ tel que $g(\alpha) = 2$.
   (b) Calculer $h(1/2)$; en déduire : $\alpha \geqslant 1/2$.
   (c) À l'aide de la calculatrice, déterminer explicitement le plus petit entier naturel n_0 tel que $\sum_{n=1}^{n_0} \sqrt{n}(0,6)^n \geqslant 2$.
   Que peut-on en déduire pour α ?
   (d) Écrire quelques lignes de Python qui permettraient de déterminer cet entier n_0.
5. (a) Montrer :
   $$\forall x \in]-1,1[, \qquad (1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n.$$
   (b) Montrer que la série $\sum \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ est convergente.
   (c) Montrer que la série $\sum \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ n'est pas convergente, et déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n$.
   (d) Montrer enfin que la fonction g possède une limite finie lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.
   On citera précisément le théorème utilisé.

2 D'après CCP 2014 – MP 1

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

En remarquant que, pour $k \geqslant 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Cette façon de réécrire S_n s'appelle la transformation d'Abel.

2. On suppose que (B_n) est bornée et que (a_n) est décroissante de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge.
   (b) En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.
   (c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, *après l'avoir énoncé.*
3. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer pour n entier naturel, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.
   (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. On s'intéresse à la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}\,(u_n)$) convergent.
On notera U sa fonction somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

1. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$.
   On suppose que (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leqslant M$ *(la suite (F_n) est dite uniformément bornée)*
   (a) Démontrer que la suite de fonctions $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A.
   (b) À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.
2. Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \mathrm{e}^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}$.
   (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
   (c) En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.
   (d) On fixe $p \in \mathbb{N}$, et on considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,\pi]$.

On pourra, par exemple, utiliser[1] *:*

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad \frac{x}{\pi} \leqslant \sin\frac{x}{2}\cdot$$

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

1. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série de fonctions.
2. On considère la série de la variable complexe $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}\cdot$
   (a) Justifier le fait que cette série entière a pour rayon de convergence 1.
   (b) On note $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.
   Démontrer que la série de la variable réelle $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$
   (en particulier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ *ne converge pas uniformément sur* D*).*
   (c) Pour $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leqslant 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leqslant \cos\alpha$.
   Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.
   On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ *et son affixe.*
   (d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k$.
   Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathrm{Re}(z)$:
   $$|F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}\cdot$$
   (e) Démontrer que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur toutes les parties D_α (pour $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

3 Un essai...

Voici quelques remarques/notes écrites plus ou moins rageusement lors de la correction de ces problèmes il y a quelques années...
Vais-je devoir les signaler à nouveau cette année ?

3.1 Premier problème

— Pas de d'Alembert, pitié ! Rarement fait de façon efficace et convaincante.
— Ralala, pas de TVI !
— Ben oui, strictement !

3.2 Deuxième problème

— Majorations de complexes ! ! !
— $|S_n| \leqslant$ ... donc (S_n) est convergente...
— (nimpe) donc (S_n) est convergente...
— « passages à la limite » sans savoir qu'elles existent.
— Pitié, pas de récurrence.
— Savoir enfin sommer les suites géométriques...
— Que vaut $e^{i\theta}$?
— Bravo pour l'uniforme convergence sur ...

1. Une petite prime sera généreusement offerte à ceux justifiant cette inégalité.