De la géométrie, des séries et du Python

À rendre le lundi 10 septembre 2018

Ce mini problème est inspiré d'un exercice posé en 2015 à l'oral de centrale en PSI. On y étudie le comportement d'une suite de points.

Ce que j'attends

Il s'agit de rédiger proprement des mathématiques, selon des règles qui seront peut-être (mais pas forcément) un peu différentes de celles en vigueur en première année. Les règles sont celles expliquées en cours. Rappel de quelques unes :

— On laisse de la place en haut de la première copie (disons un tiers de page). Moins vous laisserez de place, plus j'écrirai gros, avec des conséquences désastreuses. On numérote les n copies (pas les $4n$ pages) de $1/n$ à n/n en bas (à droite ou à gauche, je ne suis pas psychorigide [1]) de la première des 4 pages de chaque copie.

— On n'écrit jamais d'égalité sans contexte (« On a... », « On souhaite montrer que... », « Et ainsi.. ») ; deux égalités successives non connectées : poubelle. Le symbole $\Rightarrow$ n'est quasiment jamais utile hors définition. En particulier, il ne doit quasiment jamais être présent sur vos copies, et JAMAIS pour ce premier DM. Le symbole $\Longleftrightarrow$ est plus utile, pour peu que l'on sache ce qu'il signifie (certainement pas un raccourci pour « et donc... » ou même « c'est-à-dire »), mais dans cette copie, on peut très bien s'en passer.

— Etc.

1 On se lance

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O. On définit l'application Φ qui envoie l'origine sur elle-même, et tout autre point $M(x, y)$ sur son projeté orthogonal sur la droite (PQ), avec $P(x, 0)$ et $Q(0, y)$. Pour un point $M_0(x_0, y_0)$ fixé, on définit la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $M_{n+1} = \Phi(M_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera (x_n, y_n) les coordonnées de M_n.

1. Faire un dessin dans le cas $M_0(2, 1)$: représenter M_0, et construire les points M_1 et M_2 (on ne demande pas leurs coordonnées exactes, mais juste un dessin expliquant leur construction). Avez-vous une idée sur le comportement de cette suite de points ?
2. Que dire de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $x_0 > 0 = y_0$?
3. Même chose si $y_0 > 0 = x_0$.
4. Même chose si $x_0 = y_0 > 0$. *On donnera ici la valeur de (x_1, y_1) puis de (x_n, y_n).*
5. Expliquer comment le cas $x_0 < 0 < y_0$ peut être ramené au cas $0 < x_0, y_0$.
   On demande une vraie explication de maths, c'est-à-dire des phrases CLAIRES en français permettant au lecteur de comprendre en quoi le premier cas peut être traité si on sait traiter le deuxième. On pourra introduire deux suites de points : celle issue de $M_0(x_0, y_0)$ et celle issue de $M_0'(-x_0, y_0)$...
6. De même, expliquer comment le cas $0 < x_0 < y_0$ peut se ramener au cas $0 < y_0 < x_0$.

2 Le cas générique

Pour les trois premières questions, on suppose que $M(x, y)$ n'est pas l'origine, et on s'intéresse aux coordonnées (x', y') de $M' = \Phi(M)$.

[1] Mouais...

1. Donner un vecteur directeur de (PQ) puis un vecteur normal (i.e. : orthogonal à cette droite).
2. En déduire (en expliquant !) une équation[2] de (PQ).
3. En utilisant d'une part $M' \in (PQ)$ et d'autre part $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{PQ}$, montrer : $\begin{cases} x' = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{y^3}{x^2+y^2} \end{cases}$
4. On suppose : $x_0 \neq 0$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n = x_n \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{3^n}$$

OUI, je vous demande de la rédiger... et NON je ne pars pas du principe que « c'est bon, à la fin de la sup, ils savent faire ».

3 Une série

Dans les trois premières questions de cette partie, on suppose $0 < y_0 < x_0$ et on pose $p = \dfrac{y_0}{x_0} \in]0, 1[$.

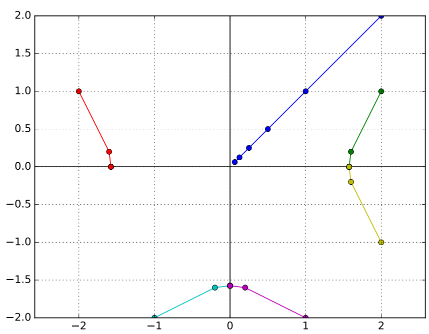
1. À l'aide des résultats établis dans la partie précédente, exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} à l'aide de x_n, n et p.
2. En déduire une expression de $\ln(x_n)$ comme une somme partielle de série.
3. Justifier la convergence de la série précédente. En déduire le comportement des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Que dire si $0 < x_0 < y_0$?

4 Un peu de Python

1. Écrire une fonction prenant en entrée (x, y) et renvoyant (x', y') (avec les notations de la deuxième partie).
2. Écrire une fonction prenant en entrée (x_0, y_0, n) et renvoyant les deux listes $[x_0, x_1, ..., x_n]$ et $[y_0, y_1, ..., y_n]$.
3. Représenter les points M_n (pour $0 \leqslant n \leqslant 5$) pour différentes valeurs de (x_0, y_0), comme dans le dessin ci-dessous.
   Pour une ligne brisée avec les points mis en évidence, on pourra utiliser :
   `plot(les_x, les_y, 'o-')`

Et bien entendu...

Après la rédaction du DM, vous relisez les consignes initiales, constatez que vous ne les avez pas suivies, jetez à la poubelle le premier jet, et recommencez tout !



2. Puisque x et y sont des constantes fixées provisoirement, on pourra noter X et Y des coordonnées génériques...