À rendre le mercredi 18 octobre 2017

1 Nilpotents d'indice 2 en dimension 3

Dans tout l'exercice, l'espace E dans lequel on travaille est de dimension 3. On s'intéresse aux $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

1. On suppose **seulement dans cette question** que $v \in \mathcal{L}(E)$ possède pour matrice dans une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$:
$$\operatorname{Mat}(v, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer le rang de v.
   (b) Donner une base du noyau puis de l'image de v.
   (c) Faire un dessin où on voit tout ce beau monde (les f_i, l'image et le noyau).
2. À partir de maintenant, u est un endomorphisme de E non nul, et tel que $u^2 = 0$.
   (a) Justifier : $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$. À l'aide du théorème du rang, en déduire les dimensions du noyau et de l'image de u.
   (b) Construire une base de E telle que la matrice de u dans cette base vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On partira de e_3 en dehors du noyau, on construira e_1 et e_2 de façon adéquate, on vérifiera que (e_1, e_2, e_3) est effectivement une base de E... et on pourra conclure sans mal.
   (c) Soit $w \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $w^3 = u$.
   Montrer : $w^9 = 0$, puis : $w^3 = 0$. Que conclure ?
   (d) On cherche les $z \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $z^2 = u$ (équation qu'on ne suppose pas vérifiée par défaut, BIEN ENTENDU : vous savez que « je cherche » ne signifie pas « je dispose de »...).
      i. Montrer que si on a effectivement $z^2 = u$, alors u et z commutent, puis que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par z. En déduire la forme nécessaire de la matrice de z dans une base adaptée.
      ii. Déterminer tous les endomorphismes z de E vérifiant $z^2 = u$.

2 Formule d'inversion de Pascal

On va montrer ici que deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$$
si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$

Dans les deux premières questions, n est fixé et Φ désigne l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, par :
$$\forall P \in E, \qquad \Phi(P) = P(X+1)$$
(attention, P DE $X+1$, pas P FOIS $X+1$).

1. Montrer que Φ est un automorphisme de E en exhibant $\Psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_E$. *On explicitera, pour $P \in E$, la valeur de $\Psi(P)$.*
2. Déterminer les matrices A et B de Φ et Ψ dans la base canonique de E. Que dire de ces deux matrices (l'une vis-à-vis de l'autre) ?
3. On suppose ici :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$$
Traduire ces relations matriciellement (à n fixé, écrire les relations aux rangs $0, 1, ..., n$), et en déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$
4. Prouver la réciproque.