1 Des produits infinis

1. (a) Supposons que $\prod \alpha_k$ est convergent. Puisque $P_n = \alpha_n P_{n-1}$ et les P_k sont différents de 0, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \alpha_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}\cdot$$

Puisque $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $P_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec ℓ DIFFÉRENT de 0 (c'est ici que ça intervient, et c'est essentiel), les résultats de terminale sur les convergences de suites nous assurent :

$$\boxed{\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1}$$

(b) Si $\prod(1+u_n)$ est convergent, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, de limite strictement positive, donc $(\ln(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente (continuité de la fonction ln). Et puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k),$$

la série $\sum \ln(1+u_k)$ est bien convergente.
Réciproquement, si $\sum \ln(1+u_k)$ est convergente, alors la suite de ses sommes partielles est convergente, de limite disons K. Ainsi :

$$\ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} K.$$

Mais par continuité cette fois de la fonction exponentielle, on obtient :

$$P_n = \mathrm{e}^{\ln P_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^K,$$

donc par définition, $\prod(1+u_n)$ est convergent.

$$\boxed{\text{Le produit } \prod(1+u_n) \text{ est convergent si et seulement si la série } \sum \ln(1+u_n) \text{ est convergente.}}$$

Ceux qui auront travaillé par équivalence auront certainement zappé un voire deux arguments de continuité, leur préférant la magie.

2. On utilise le critère précédent (condition nécessaire et suffisante). Dans chacun des cas, la série $\sum \ln(1+u_n)$ est à termes de signes constants, donc l'équivalent $\ln(1+u_n) \sim u_n$ nous assure que $\sum \ln(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge, ce qui est le cas dans le premier et le troisième cas seulement.

$$\boxed{\prod(1-1/n^2) \text{ et } \prod(1+1/n^2) \text{ convergent ; } \prod(1-1/n) \text{ et } \prod(1+1/n) \text{ divergent.}}$$

3. On va voir apparaître des collisions dans les produits :

$$\begin{aligned} P_N &= \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{(1.3)(2.4)(3.5)...((N-2)N)((N-1)(N+1))}{2^2 3^2 ...(N-1)^2 N^2} = \frac{N+1}{2N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot \end{aligned}$$

(on retrouve les k^2 au numérateur comme au dénominateur, sauf pour $k \in \{1, 2, N, N+1\}$). Ainsi :

$$\boxed{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot}$$

Si ça vous amuse, vous pouvez rédiger ça sans petits points, avec des changements d'indices dans des produits...

4. Il s'agit de la même remarque qu'à la question 3 : puisque les u_n sont positifs, les $\ln(1+u_n)$ sont eux-mêmes positifs, et on peut utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs, modulo l'équivalent $\ln(1+u_n)\sim u_n$: $\sum\ln(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

$$\boxed{\text{Le produit } \prod(1+u_n) \text{ est convergent si et seulement si la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

2 Du calcul matriciel

1. On calcule le rang de A de façon standard, en pivotant :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\-1&1&2&1&1\\2&1&1&2&3\\1&5&2&7&0\\3&3&4&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\cdots]{L_2\leftarrow L_2+L_1}\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\0&3&3&4&2\\0&-3&-1&-4&1\\0&3&1&4&-1\\0&-3&1&-4&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\cdots]{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\0&3&3&4&2\\0&0&2&0&3\\0&0&-2&0&-3\\0&0&2&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[L_5\leftarrow L_5-L_3]{L_4\leftarrow L_4+L_3}\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\0&3&3&4&2\\0&0&2&0&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

et comme le rang d'un matrice est inchangé par opérations élémentaires :

$$\boxed{\text{Le rang de } A \text{ vaut } 3.}$$

2. On sait déjà que le noyau de u est de dimension 2. On le déterminer on résolvant $u(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{0}$, que l'on va résoudre matriciellement. Au passage, les opérations effectuées pour rendre le système triangulaire sont les mêmes que lors du calcul du rang, ce qui nous simplifie bien la tâche :

$$u(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{0}\iff AX=0\iff\left\{\begin{array}{ccccccccccc}x_1&+&2x_2&+&x_3&+&3x_4&+&x_5&=0\\&&3x_2&+&3x_3&+&4x_4&+&2x_5&=0\\&&&&2x_3&&&&3x_5&=0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{ccc}x_1&=&-2x_2-x_3-3x_4-x_5=-\frac{1}{3}x_4-\frac{7}{6}x_5\\x_2&=&-\frac{1}{3}\left(-3x_3-4x_4-2x_5\right)=-\frac{4}{3}x_4+\frac{5}{6}x_5\\x_3&=&-\frac{3}{2}x_5\end{array}\right.$$

Et donc :

$$\operatorname{Ker}(u)=\left\{(-x_4/3-7x_5/6,-4x_4/3+5x_5/6,-3x_5/2,x_4,x_5)\;\middle|\;x_4,x_5\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}(\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2}),$$

avec $\overrightarrow{g_1}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},0,1,0\right)$ et $\overrightarrow{g_2}=\left(-\frac{7}{6},\frac{5}{6},-\frac{3}{2},0,1\right)$. La famille $(\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2})$ est clairement libre [1], et donc :

$$\boxed{\text{Une base du noyau de } u \text{ est } (\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2}).}$$

On aurait également pu pivoter selon les colonnes, en gardant l'information sur les valeurs des colonnes $u(\ldots)$.

1. Sans cet argument : on connaît la dimension du noyau, grâce au théorème du rang...

3. Notons $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_5})$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. La famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ constitue une base de E (regarder sa matrice dans la base canonique : elle est triangulaire). Ainsi :

$$\boxed{\text{Un supplémentaire du noyau de } u \text{ est } \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).}$$

4. D'après le cours, on sait que u induit un isomorphisme entre tout supplémentaire du noyau et $\operatorname{Im}(u)$. Une base de ce dernier est donc, d'après la question précédente : $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ avec $f_1 = u(\overrightarrow{e_1})$, $f_2 = u(\overrightarrow{e_2})$, et $f_3 = u(\overrightarrow{e_3})$.
Pour la compléter, il manque deux vecteurs... et si on tentait $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$? On aimerait bien que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ soit de rang 5... et bien vérifions !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_5 \leftarrow 2L_5 - 3L_3]{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \leftarrow 3L_5 - L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right) \text{ est de rang 5, donc constitue une base de } E.}$$

Était-ce un coup de chance que (e_1, e_2) conviennent ? Non pas vraiment, et un dessin devrait vous en convaincre... Et s'ils n'avaient pas convenu ? Alors on aurait pivoté sur (f_1, f_2, f_3) pour obtenir une forme échelonnée (par exemple dans la base canonique) pour pouvoir ensuite compléter facilement.

5. Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de E, $\mathcal{E}_1 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ (attention à l'ordre des vecteurs !). Par construction des bases $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}$, on a $\operatorname{Mat}(u, \mathcal{E}_1, \mathcal{F}) = J_3$, de sorte qu'en notant $P_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{E}_1}{\operatorname{Pas}}$ et, $Q_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}{\operatorname{Pas}}$ les matrices de passage respectives de la base $\mathcal{E}$ vers les bases $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire celles exprimant les nouvelles dans l'ancienne...), notre diagramme préféré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "u", "A"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "Q_1^{-1}", "Id_E"'] \\ \mathcal{E}_1 \arrow[u, "P_1"', "Id_E"] \arrow[r, "u", "J_3"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

et le théorème associé nous assurent : $J_3 = Q_1^{-1} A P_1$. Il reste alors à prendre :

$$Q = P_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{E}_1}{\operatorname{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -1/3 & -7/6 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $P = Q_1^{-1} = \underset{\mathcal{F} \to \mathcal{E}}{\operatorname{Pas}}$: on calcule cette matrice en exprimant les vecteurs de la base canonique à l'aide de ceux de $\mathcal{F}$. Pour cela, on part des relations définissant $\mathcal{F}$ à l'aide de $\mathcal{E}$. Et c'est un peu casse-pieds à écrire et infect à typographier... je ne laisse donc que le résultat :

$$P = \underset{\mathcal{F} \to \mathcal{E}}{\operatorname{Pas}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7/9 & -1/18 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/9 & 5/18 & -1/6 \\ 0 & 0 & -2/3 & -1/6 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et là je me dis que je vais bien m'amuser pour corriger les copies...

6. Bien sûr, $P^{-1} = Q_1 = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \underset{\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}$ se calcule comme dans la question précédente... mais là je veux bien détailler les calculs (le système n'est pas trop méchant à résoudre...) :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \overrightarrow{e_1} & & & & & = \overrightarrow{e_1} \\ & \overrightarrow{e_2} & & & & = \overrightarrow{e_2} \\ & & \overrightarrow{e_3} & & & = \overrightarrow{e_3} \\ -\frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} & -\ \frac{4}{3}\overrightarrow{e_2} & & +\overrightarrow{e_4} & & = \overrightarrow{g_1} \\ -\frac{7}{6}\overrightarrow{e_1} & +\ \frac{5}{6}\overrightarrow{e_2} & -\ \frac{3}{2}\overrightarrow{e_3} & & +\overrightarrow{e_5} & = \overrightarrow{g_2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llllll} \overrightarrow{e_1} = & \overrightarrow{e_1} & & & & \\ \overrightarrow{e_2} = & & \overrightarrow{e_2} & & & \\ \overrightarrow{e_3} = & & & \overrightarrow{e_3} & & \\ \overrightarrow{e_4} = & \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} & +\frac{4}{3}\overrightarrow{e_2} & & +\overrightarrow{g_1} & \\ \overrightarrow{e_5} = & \frac{7}{6}\overrightarrow{e_1} & -\frac{5}{6}\overrightarrow{e_2} & +\frac{3}{2}\overrightarrow{e_3} & & +\overrightarrow{g_2} \end{array}\right.$$

De sorte que

$$Q^{-1} = \underset{\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 7/6 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 De la réduction sans le cours

3.1 Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

1. $\mathrm{Mat}(u - 2\mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (deux colonnes/lignes proportionnelles, ou un tour de pivot), donc est non inversible, donc $u - 2\mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective donc pas injective. Plus précisément, le noyau de $u - 2\mathrm{Id}_E$ est de dimension $2 - 1 = 1$, et contient visiblement $f_1 = (-4, 1)$ puisque $\begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (autre point de vue : la matrice de $v = u - 2\mathrm{Id}_E$ dans la base $\mathcal{E}$ nous indique que $v(e_2) = 4v(e_1)$, donc $v(e_2 - 4e_1) = 0$... et si on ne voit vraiment rien, on résout $(A - 2I_2)X = 0$).
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}f_1, \text{ avec } f_2 = (-4, 1).}$$
2. De la même façon, $\mathrm{Mat}(u + 3\mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 20 & 60 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$, donc :
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u + 3\mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}f_2, \text{ avec } f_2 = (-3, 1).}$$
3. $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) dans E qui est de dimension 2, donc c'est une base de E. Par ailleurs, $f_1 \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}_E)$, donc $u(f_1) = 2f_1$, et de même, $u(f_2) = -3f_2$. Ainsi :
$$\boxed{D = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}$$
4. P est par définition la matrice représentant les coordonnées de f_1 et f_2 dans la base $\mathcal{E}$, et donc :
$$\boxed{P = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$
5. On est exactement dans le cadre du théorème de changement de base :
$$\begin{array}{ccc} E, \mathcal{E} & \xrightarrow[A]{u} & E, \mathcal{E} \\ {\scriptstyle Id_E}\big\uparrow{\scriptstyle P} & & {\scriptstyle Id_E}\big\downarrow{\scriptstyle P^{-1}} \\ E, \mathcal{F} & \xrightarrow[D]{u} & E, \mathcal{F} \end{array}$$
$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})$, $D = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F})$, et $P = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$, donc $D = P^{-1}.A.P$, ou encore :

$$\boxed{A = P.D.P^{-1}}$$

6. $P^{-1} = \underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\text{Pas}}$ est la matrice représentant les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{F}$. Or $f_1 - f_2 = -e_1$, donc $e_1 = -f_1 + f_2$. Mais $f_1 = -4e_1 + e_2$, donc $e_2 = f_1 + 4e_1 = -3f_1 + 4f_2$, et ainsi :

$$\boxed{P^{-1} = \underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\text{Pas}} = \text{Mat}\left((e_1, e_2), \mathcal{F}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

3.2 Quatre applications

1. (a) On a sans problème $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$, puis par récurrence immédiate[2] :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}$$

(b) On peut commencer par observer :

$$A^2 = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^2.P^{-1}; \quad A^3 = P.D^2.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^3.P^{-1}$$

puis montrer par une récurrence (qu'on peut encore déclarer immédiate) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P.D^n.P^{-1}.}$$

Un autre point de vue plus direct consistait à voir que $A^n = \text{Mat}(u, \mathcal{E})^n$, $D^n = \text{Mat}(u^n, \mathcal{F})$, *et* $P = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\text{Pas}}$, *donc d'après la formule de changement de base,* $D^n = P^{-1}.A^n.P$, *ou encore :* $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
E, \mathcal{E} \arrow[r, "u^n", "A^n"'] & E, \mathcal{E} \arrow[d, "Id_E"', "P^{-1}"] \\
E, \mathcal{F} \arrow[u, "Id_E", "P"'] \arrow[r, "u^n", "D^n"'] & E, \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

(c) Il n'y a plus qu'à recoller les morceaux :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 4.2^n - 3(-3)^n & -12.2" - 12(-3)^n \\ -2^n + (-3)^n & -3.2^n + 4(-3)^n \end{pmatrix}}$$

2. (a) Si $u \circ v = v \circ u$, alors les matrices dans la base $\mathcal{E}$ de $u \circ v$ et de $v \circ u$ sont égales, donc $AB = BA$. Réciproquement, si $AB = BA$, alors $\text{Mat}(u \circ v, \mathcal{E}) = \text{Mat}(v \circ u, \mathcal{E})$, et *l'injectivité* de $w \mapsto \text{Mat}(w, \mathcal{E})$ nous assure que $u \circ v = v \circ u$;

$$\boxed{\text{ce qui prouve l'équivalence demandée.}}$$

(b) (f_1, f_2) constitue une base E. On sait alors que si on la casse en deux, les deux sous-espaces engendrés constituent deux sous-espaces supplémentaires, ce qui nous donne ici directement le résultat souhaité :

$$\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$$

(c) Supposons d'abord : $u \circ v = v \circ u$. Pour montrer que E_1 est stable par v, fixons $f \in E_1$, et montrons que $v(f) \in E_1$, c'est-à-dire : $v(f) \in \text{Ker}\,(u - 2\text{Id}_E)$. On calcule pour cela :

$$u\left(v(f)\right) = u \circ v(f) = v \circ u(f) = v\left(u(f)\right) = v(2f) = 2v(f),$$

et ainsi, $v(f) \in \text{Ker}\,(u - 2\text{Id}_E)$, ce qu'il fallait démontrer. La stabilité de E_2 par v se traite de façon identique.

Supposons maintenant que E_1 et E_2 sont stables par v, et montrons que $u \circ v = v \circ u$. On fixe pour cela $x \in E$: il peut se décomposer (d'après la question précédente) $x = x_1 + x_2$, avec

2. Allez, je vous l'accorde !

$x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On a alors $u(x_1) = 2x_1$, mais $v(x_1) \in E_1$, donc on a aussi $u\left(v(x_1)\right) = 2v(x_1)$, avec des relations similaires pour x_2. Ainsi :

$$u \circ v(x) = u\left(v(x_1+x_2)\right) = u\left(v(x_1)+v(x_2)\right) = u\left(v(x_1)\right)+u\left(v(x_2)\right) = 2v(x_1)-3v(x_2) = v(2x_1-3x_2)$$

alors que :

$$v \circ u(x) = v\left(u(x_1+x_2)\right) = v\left(u(x_1)+u(x_2)\right) = v(2x_1-3x_2).$$

On a bien montré que pour tout $x \in E$, $u \circ v(x) = v \circ u(x)$. ■

$$\boxed{u \circ v = v \circ u \text{ si et seulement si } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont stables par } v.}$$

(d) $E_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$, donc la stabilité de E_1 par v se traduit par le fait que $v(f_1) \in E_1$, c'est-à-dire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(f_1) = \lambda f_1$. Le même raisonnement s'applique évidemment pour f_2, et ainsi : $u \circ v = v \circ u$ si et seulement s'il existe deux scalaires λ et μ tels que : $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

$$\boxed{u \circ v = v \circ u \text{ si et seulement si } \mathrm{Mat}' v, \mathcal{F}) \text{ est diagonale.}}$$

(e) Il est clair que deux matrices diagonales commutent. Si B est de la forme PD_1P^{-1}, avec D_1 diagonale, on a donc :

$$AB = P.D.P^{-1}.P.D_1.P^{-1} = P.DD_1.P^{-1} = P.D_1D.P^{-1} = P.D_1.P^{-1}.P.D.P^{-1} = BA.$$

Réciproquement, supposons : $AB = BA$. On a alors $u \circ v = v \circ u$. Mais alors, $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{F})$ est diagonale d'après de qui précède. Notons-la D_1 : la formule de changement de base nous donne $\mathrm{Mat}(v, \mathcal{E}) = P. \mathrm{Mat}(v, \mathcal{F}).P^{-1}$, c'est-à-dire $B = P.D_1.P^{-1}$. ■

$$\boxed{B \text{ commute avec } A \text{ si et seulement si } B \text{ est de la forme } PD_1P^{-1}, \text{ avec } D_1 \text{ diagonale.}}$$

Pour la réciproque, le point de vue expliqué rapidement au détour d'un TD était celui élémentaire du calcul : si $AB = BA$, alors en notant $B' = P^{-1}BP$ on a $B'D = \ldots = DB'$, donc B' commute avec la matrice diagonale à éléments diagonaux distincts D, et un calcul simple de $B'D - DB'$ montre que B' est diagonale.

(f) Il est clair que si $B = \lambda A + \mu I_2$, alors $AB = BA$ (ben oui : calculer l'un et l'autre !).

Réciproquement, supposons $AB = BA$. On a alors $B = P.D_1.P^{-1}$, avec D_1 de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Si on a bien compris que par deux points, on peut toujours faire passer une droite(!), ou bien en résolvant un bien difficile système $(2, 2)$ ou invoquer Lagrange et ses polynômes d'interpolation... on peut affirmer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $2\lambda+\mu = \alpha$ et $-3\lambda+\mu = \beta$. On a alors $\lambda D + \mu I_2 = D_1$, donc :

$$B = P.D_1.P^{-1} = P\left(\lambda D + \mu I_2\right)P^{-1} = \lambda P.D.P^1 + \mu P.P^{-1} = \lambda A + \mu I_2.$$

$$\boxed{B \text{ commute avec } A \text{ si et seulement si } B \text{ est de la forme } \lambda A + \mu I_2.}$$

3. (a) Sans problème :

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ vérifie } (\mathcal{D}) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = P.D.P^{-1}X(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad P^{-1}X'(t) = D.P^{-1}X(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X_1'(t) = D.X_1(t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) \\ y_1'(t) = -3y_1(t) \end{cases} \qquad (\mathcal{D}')
\end{aligned}$$

Le lecteur est prié de se convaincre de ces **équivalences** *autrement que « ben oui ceci implique bien cela, puisqu'il le dit ».*

Ce système est en effet considérablement plus simple : il n'y a plus de dépendances mutuelles.

(b) Si on en croit le programme de terminale, le système $(\mathcal{D}')$ est équivalent à l'existence de deux réels α et β tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = \alpha e^{2t}$ et $y_1(t) = \beta e^{-3t}$. Mais $X = PX_1$, donc :

$$\boxed{(x,y) \text{ vérifie } (\mathcal{D}) \qquad \iff \qquad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) & = & -4\alpha e^{2t} - 3\beta e^{-3t} \\ y(t) & = & \alpha e^{2t} + \beta e^{-3t} \end{cases}}$$

(c) Le calcul de P^{-1} n'était pas nécessaire : à la fin, on a seulement eu besoin de : $X = PX_1$.

4. (a) Le principe est le même que plus haut : en notant $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $Z'_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = P^{-1}Z_n$:

$$\begin{aligned}
(u,v) \text{ vérifie } (\mathcal{R}) & \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = AZ_n \\
& \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = P.D.P^{-1}Z_n \\
& \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{-1}Z_{n+1} = D.P^{-1}Z_n \\
& \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z'_{n+1} = D.Z'_n \\
& \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} U_{n+1} = 2U_n \\ V_{n+1} = -3V_n \end{cases} \qquad (\mathcal{R}')
\end{aligned}$$

(b) Si on fait cette fois confiance au programme de première, on peut affirmer que $(\mathcal{R}')$ est équivalente à l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha 2^n$ et $V_n = \beta(-3)^n$.

(c) D'après les équivalences précédentes, et puisque $Z_n = PZ'_n$:

$$\boxed{(u,v) \text{ vérifie } (\mathcal{R}) \qquad \iff \qquad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n & = & -4\alpha.2^n - 3\beta(-3)^n \\ v_n & = & \alpha.2^n + \beta(-3)^n \end{cases}}$$

3.3 Rejouons dans $\mathbb{R}^3$

1. On échange la première et la troisième ligne, pour avoir un gentil pivot :

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ -2 & -5-\lambda & 10 \\ -3-\lambda & -4 & 10 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -6+2\lambda \\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2-5\lambda-14 \end{pmatrix}$$

Dans la deuxième ligne, on peut factoriser $\lambda - 3$. Ainsi :

— Si $\lambda = 3$, alors le rang de $A - \lambda I_3$ est celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire 2

— Si $\lambda \neq 3$, alors le rang de $A - \lambda I_3$ est celui (après l'opération $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{3-\lambda}L_2$, qui conserve le rang) de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2-5\lambda-14 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire (après l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (8+4\lambda)L_2$) celui de $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, avec $d = \lambda^2 - 5\lambda - 14 + 2(8+4\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$.
Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, -2\}$ alors $d \neq 0$, donc $A - \lambda I_3$ est de rang 3. Et si λ vaut -1 ou -2 alors $d = 0$, donc $A - \lambda I_3$ est de rang 2.

$$\boxed{\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{-2, -1, 3\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Inspirés par la première partie de ce problème et les calculs précédents, on note u l'application linéaire canoniquement associée à A, et on cherche les noyaux de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$, avec $\lambda \in \{-2, -1, 3\}$. On sait déjà qu'ils sont de dimension $3 - 2 = 1$, donc ce sont des droites. Il suffit alors de trouver un élément non nul de chacun de ces noyaux...

— $\mathrm{Mat}(u+2\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = A+2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 10 \\ -2 & -3 & 10 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$, donc :

$$(x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id}_E) \iff \begin{pmatrix} -1 & -4 & 10 \\ -2 & -3 & 10 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ \quad\quad 5x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -4x_2 + 10x_3 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Et ainsi (après un petit coup de $\mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id}_E) = \{...\mid ... \in ...\}$) :

$$\mathrm{Ker}\,(u+2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_1), \text{ avec } f_1 = (2,2,1).$$

— De même : $\mathrm{Mat}(u+\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = A+I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ -2 & -4 & 10 \\ -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$, puis (left to the reader) :

$$\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_2), \text{ avec } f_2 = (1,2,1).$$

— Et enfin, $\mathrm{Mat}(u-3\mathrm{Id}_E,\mathcal{E}) = A-3I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 \\ -2 & -8 & 10 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, puis :

$$\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(f_3), \text{ avec } f_3 = (1,1,1).$$

On montre ensuite que $\mathcal{F} = (f_1,f_2,f_3)$ est une base [3] de $\mathbb{R}^3$, en calculant le rang de cette famille, qui est aussi le rang de la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est celui de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, mais aussi celui de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce rang vaut donc 3 : $\mathcal{F}$ est alors génératrice, donc constitue une base de E. Mais par définition des f_i, on a $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$, et la formule de changement de base nous donne alors $A = P.D.P^{-1}$, ce qui était le résultat attendu.

$$\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

3. L'implication « $B = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 \Rightarrow AB = BA$ » est aussi évidente qu'une heure auparavant... Pour le sens non trivial, on suppose $AB = BA$ et on reprend le plan de la partie 3.2, en notant v l'endomorphisme canoniquement associé à $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
   (a) $AB = BA$ se traduit géométriquement par $u \circ v = v \circ u$.
   (b) De même, la relation $u \circ v = v \circ u$ implique que les droites engendrées par f_1, f_2 et f_3 sont stables par v, essentiellement car ces droites sont des noyaux de $u - \lambda\mathrm{Id}_E$. La réciproque est inutile ici, mais reste vrai parce que $\mathcal{F}$ est une base de E.
   (c) On en déduit que B est de la forme $P.D_1.P^{-1}$, avec D_1 une matrice diagonale.
   (d) Notant $D_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, il existe $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels qu'en posant $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, on ait $P(-2) = a$, $P(-1) = b$ et $P(3) = c$: c'est le théorème d'interpolation de Lagrange qui le

3. Nous saurons bientôt (cours sur la réduction) « qu'en tant que famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, elle est libre... »

dit... mais on peut le retrouver en résolvant un système à trois équations et trois inconnues (mouais... on va préférer Lagrange, non ?).
On a alors :

$$B = P.D_1.P^{-1} = P\left(\alpha D^2 + \beta D + \gamma I_3\right)P^{-1} = \alpha P.D^2.P^{-1} + \beta P.D.P^{-1} + \gamma P.P^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

■

4. Notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel se traduit $X' = AX$, soit encore, en posant

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t) \;:$$

$X'1 = DX$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_1' &= -2x_1 \\ y_1' &= -y_1 \\ z_1' &= 3z_1 \end{cases}$ ce qui est équivalent à l'existence de trois constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x_1(t) &= \alpha e^{-2t} \\ y_1(t) &= \beta e^{-t} \\ z_1(t) &= \gamma e^{3t} \end{cases}$. Les conditions initiales se traduisent $X_1(0) = P^{-1}X(0)$, ce qui permet d'obtenir directement $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ si on a calculé P^{-1} (ce qui n'est pas le cas ici, mais qui serait assez aisé). On va se contenter de résoudre le système $PX_1(0) = X(0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \cdots \iff \begin{cases} \alpha &= -1 \\ \beta &= -2 \\ \gamma &= 5 \end{cases}$$

Le système différentiel proposé, avec les conditions initiales imposées, possède donc une unique solution :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = PX_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} - 2e^{-t} + 5e^{3t} \\ -2e^{-2t} - 4e^{-t} + 5e^{3t} \\ -e^{-2t} - 2e^{-t} + 5e^{3t} \end{pmatrix}}$$

5. De façon assez originale, on note $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Z_n' = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = P^{-1}Z_n$: on a $Z_{n+1}' = D.Z_n'$, donc les suites U, V et W sont géométriques de raisons -2, -1 et 3. Les conditions initiales se traduisent par ailleurs $Z_0' = PZ_0$, soit encore $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, système qui a déjà été résolu ! On a donc $\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(-2)^n \\ -2(-1)^n \\ 5.3^n \end{pmatrix}$
Il existe donc un unique triplet de suites vérifiant les relations de récurrences et les conditions initiales de l'énoncé :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n' = PX_n = \begin{pmatrix} -2(-2)^n - 2(-1)^n + 5.3^n \\ -2(-2)^n - 4(-1)^n + 5.3^n \\ -(-2)^n - 2(-1)^n + 5.3^n \end{pmatrix}}$$

3.4 Un générateur automatique d'exercices

1. Pour inverser T_1, on peut la voir comme la matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}^3$, disons $T_1 = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$. On a alors $T_1^{-1} = \underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}$. Mais si on a bien compris comment on résout un système

triangulaire tel que

$$\begin{cases} e_1 & & & & & = f_1 \\ \alpha_{2,1}e_1 & + & e_2 & & & = f_2 \\ \alpha_{3,1}e_1 & + & \alpha_{3,2}e_2 & + & e_3 & = f_3 \\ & & & \ddots & & \\ \alpha_{n,1}e_1 & + & \cdots & \alpha_{n,n-1}e_{n-1} & + \quad e_n & = f_n \end{cases}$$

on est bien convaincu qu'on aura pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, e_k de la forme $f_k + \sum_{i<k} \beta_{k,i} f_i$ avec les $\beta_{k,i}$ entiers. Cela se prouverait par récurrence (avec prédécesseurs). On a ainsi :

$$\boxed{T_1^{-1} = \underset{\mathcal{F}\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_{2,1} & \cdots & \beta_{n,1} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \beta_{n,n-1} \\ 0 & & (0) & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).}$$

2. Prouvons ce résultat à la frontière du cours...
On a $T_1.T_1^{-1} = I_n$, donc en transposant : ${}^t(T_1^{-1}){}^tT_1 = {}^tI_n = I_n$, et de même, $T_1^{-1}T_1 = I_n$ fournit ${}^tT_1{}^t(T_1^{-1}) = {}^tI_n = I_n$. Ainsi :

$$\boxed{{}^tT_1 \text{ est inversible, d'inverse } {}^t(T_1^{-1}).}$$

3. P est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible. Par ailleurs, $P^{-1} = (T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1} = {}^t(T_1^{-1})T_1^{-1}$ est le produit de deux matrices à coefficients entiers d'après la question 1, donc est elle-même à coefficients entiers.

$$\boxed{P^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})}$$

4.
```
from numpy import *
T1 = array([[1, 2, -1], [0, 1, 1], [0, 0, 1]])
P = dot(T1, transpose(T1))
D = array([[5, 0, 0], [0, -4, 0], [0, 0, -2]])
C = dot(P, dot(D, linalg.inv(P)))
"""
>>> print P
[[ 6  1 -1]
 [ 1  2  1]
 [-1  1  1]]
>>> print C
[[  44.  -94.  140.]
 [  15.  -36.   49.]
 [  -3.    4.   -9.]]
>>> print(linalg.inv(P).dot(C).dot(P))
[[  5.00000000e+00   1.06581410e-14   1.06581410e-14]
 [  1.63424829e-13  -4.00000000e+00  -7.46069873e-14]
 [ -2.23820962e-13   4.61852778e-14  -2.00000000e+00]]
"""
```