C'est parti !

À rendre le lundi 7 septembre 2015

Ce DM est constitué de nombreux petits exercices indépendants ; certains constituent – à peu de choses près – des questions de cours (exercices 4, 5 et 6) : n'allez pas consulter votre cours de sup ou la copie d'un autre ! Faites ce que vous pouvez, le plus proprement possible.
L'un des objectifs de ce début d'année est de se mettre au point sur ce qui est acceptable et ce qui ne l'est pas en terme de rédaction : faites dès maintenant un effort.
Vous n'êtes pas obligés de tout traiter, mais soyez au moins *propres* dans les exercices que vous rédigez.
En particulier :

- on numérote les *copies* (pas les *pages*) avec le format $1/N$, $2/N$, ... N/N, où N est le nombre de copies.
- on laisse de la place sur la première page, pour que le correcteur puisse s'exprimer [1]. Même chose pour les marges ;
- on s'exprime dans un français vaguement correct ;
- à l'exception éventuelle [2] de l'exercice 7, pas un seul symbole $\Longrightarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ ne sera autorisé (je rayerai la phrase incriminée la première fois, le paragraphe la deuxième, et la page à la troisième occurrence) ;
- on n'écrit *jamais* « on a A si on a B » : cela a un sens précis qui n'est bien souvent pas celui auquel pense l'auteur...
- tous les objets/variables doivent être présenté(e)s (« Fixons $v \in E$; on a alors... ») ;
- pour montrer que A implique B, on peut vouloir supposer A, ce qu'on fait en écrivant « Supposons A ; ... »
- on pense à conclure, en encadrant le résultat/la conclusion ;
- faire une intégration par parties de tête, les mains bandées et sans écrire qui sont u, v, u' et v', ça impressionne peut-être les enfants dans les cours de récréation mais pas les professeurs de mathématiques, et ça conduit à des erreurs. Ne faites donc pas les malins !

1 Quelques calculs

Exercice 1 — *Une limite*
Montrer que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3\ln(\cos(1/n))}$ possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 — *Croisé à l'oral de centrale en 2015*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}\cdot$$

1. Exprimer a_n « sans petits points » à l'aide de factorielles.
2. Sachant que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, donner un équivalent simple de a_n.

Exercice 3 — *Une intégrale*
Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$. Donner ensuite (en justifiant soigneusement) UNE primitive de l'application

$$\varphi : x > 0 \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot$$

1. Ne pas le faire conduit en général à de mauvaises surprises sur la copie.
2. Pour d'éventuelles résolutions de systèmes.

2 Suites, séries

Exercice 4 — *Sans utiliser « D'Alembert » bien sûr...*
Soit u une suite réelle telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\cdot$ Montrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5 — *À démontrer à la main bien entendu...*
Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, alors que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

3 Algèbre linéaire

Exercice 6 — *Du cours de base*
Montrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau vaut $\{0\}$.

Exercice 7 — *Calculs effectifs d'extraction/complétion*
On se place dans $E = \mathbb{R}^4$, et on considère les quatre vecteurs :

$$\overrightarrow{h_1} = (1, 2, -1, 2), \quad \overrightarrow{h_2} = (-2, -1, 2, -3), \quad \overrightarrow{h_3} = (-1, 4, 1, 0), \quad \overrightarrow{h_4} = (2, 7, -2, 5).$$

1. La famille $\mathcal{H} = \left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{h_3}, \overrightarrow{h_4}\right)$ est-elle libre ? Si ce n'est pas le cas, en extraire une famille libre maximale.
2. La famille $\mathcal{H}$ est-elle génératrice ? Si ce n'est pas le cas, la compléter (avec un minimum de vecteurs !) pour en faire une famille génératrice.

Exercice 8 — *Une matrice qu'on rencontrera souvent*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Déterminer le rang de A puis, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, celui de $A - \lambda I_n$.

Exercice 9 — *Noyaux et images itéré(e)s*
Dans les trois premières questions, u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $K_n = \operatorname{Ker}(u^n)$ et $I_n = \operatorname{Im}(u^n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.
2. On suppose dans cette question que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$. Montrer : $K_{n_0+1} = K_{n_0+2}$, puis : $K_n = K_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Même question avec les images.
3. Montrer que si E est de dimension finie, alors il existe effectivement un rang n_0 tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$. Montrer qu'on a alors $I_{n_0} = I_{n_0+1}$.
4. On se place maintenant dans $E = \mathbb{K}[X]$. Φ est l'application $P \mapsto P'$ et Ψ est l'application qui à P associe XP. Pour Φ et pour Ψ, décrire les noyaux et images itérés K_n et I_n.

Le plus important

Relire les indications de la partie préliminaire, relire sa copie, constater qu'on n'a absolument pas suivi les consignes, et tout reprendre !