Jeu, set et match

Des maths et du Python autour du tennis

stephane@gonnord.org - http://blog.psi945.fr

Mercredi 22 juin 2016

Plan

1. Des règles simples et fausses
   - Règles virtuelles
   - Simulations
2. Un jeu est une chaîne de Markov !
   - Les vraies règles
   - Gestion de l'égalité : simulations
   - Gestion de l'égalité : théorie
   - Puissances d'une matrice stochastique
3. Un vrai match
   - Gros graphes et grosses matrices
   - Calculs et simulations
   - Résultats

Dans tout cet exposé...

- Alice (joueur 0) joue contre Bob (joueur 1).
- À chaque échange, Alice a une probabilité p de remporter le point.
- Tous les échanges sont indépendants.

Dans tout cet exposé...

- Alice (joueur 0) joue contre Bob (joueur 1).
- À chaque échange, Alice a une probabilité p de remporter le point.
- Tous les échanges sont indépendants.
- On veut évaluer les probabilités :
  - p_j qu'Alice remporte un jeu donné ;
  - p_t qu'Alice remporte un éventuel tie-break ;
  - p_s qu'Alice remporte un set donné ;
  - p_m qu'Alice remporte le match.

Dans tout cet exposé...

- Alice (joueur 0) joue contre Bob (joueur 1).
- À chaque échange, Alice a une probabilité p de remporter le point.
- Tous les échanges sont indépendants.
- On veut évaluer les probabilités :
  - p_j qu'Alice remporte un jeu donné ;
  - p_t qu'Alice remporte un éventuel tie-break ;
  - p_s qu'Alice remporte un set donné ;
  - p_m qu'Alice remporte le match.
- Pour le non probabiliste :

$$p_m = p_s = p_j = p$$

(et c'est vrai si $p = 0, 1/2$ ou 1 !)

Dans tout cet exposé...

- Alice (joueur 0) joue contre Bob (joueur 1).
- À chaque échange, Alice a une probabilité p de remporter le point.
- Tous les échanges sont indépendants.
- On veut évaluer les probabilités :
  - p_j qu'Alice remporte un jeu donné ;
  - p_t qu'Alice remporte un éventuel tie-break ;
  - p_s qu'Alice remporte un set donné ;
  - p_m qu'Alice remporte le match.
- Pour le non probabiliste :

$$p_m = p_s = p_j = p$$

  (et c'est vrai si $p = 0, 1/2$ ou 1 !)
- Et pourtant...

Sommaire

Des règles virtuelles

- Celui qui gagne le match est celui qui remporte le premier point !

$$p_m = p$$

Des règles virtuelles

- Celui qui gagne le match est celui qui remporte le premier point !

$$p_m = p$$

- Bon, le premier qui gagne deux points a gagné !

$$p_m =$$

Des règles virtuelles

- Celui qui gagne le match est celui qui remporte le premier point !

$$p_m = p$$

- Bon, le premier qui gagne deux points a gagné !

$$p_m = p^2 + 2p^2(1-p)$$

Des règles virtuelles

- Celui qui gagne le match est celui qui remporte le premier point !

$$p_m = p$$

- Bon, le premier qui gagne deux points a gagné !

$$p_m = p^2 + 2p^2(1-p)$$

- Le premier qui gagne trois points a gagné.

$$p_m = ?$$

Des règles virtuelles

- Celui qui gagne le match est celui qui remporte le premier point !

$$p_m = p$$

- Bon, le premier qui gagne deux points a gagné !

$$p_m = p^2 + 2p^2(1-p)$$

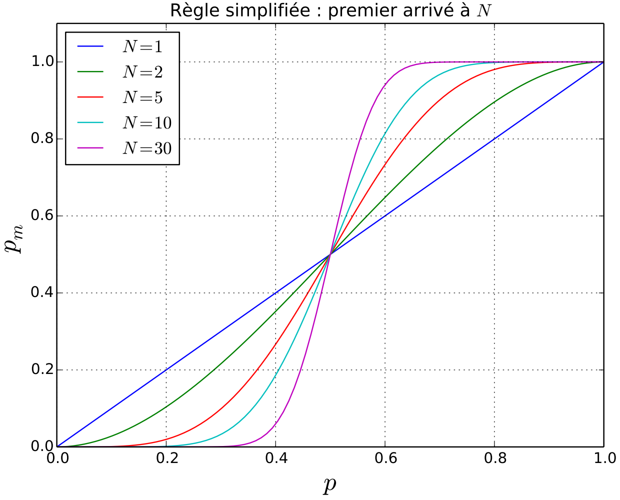
- Le premier qui gagne trois points a gagné.

$$p_m = ?$$

- Le premier qui gagne N points a gagné.

$$p_m = ?$$

Des règles virtuelles : résultats



Sommaire

Simulons des jeux

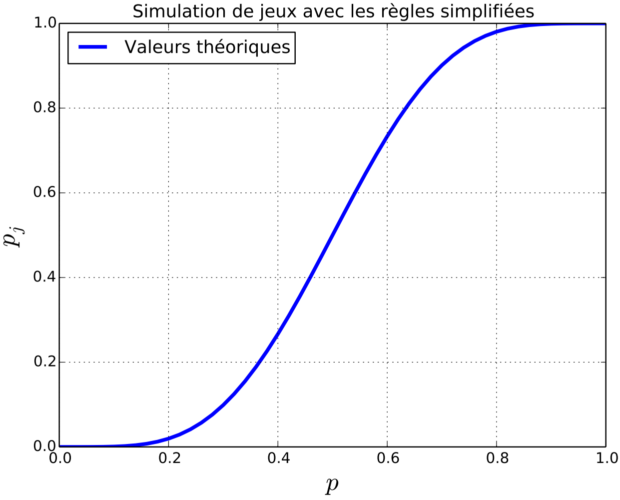
```
def simul(p, N):
    a, b = 0, 0 # les scores d'Alice et Bob
    while max(a, b) < N:
        if random() < p:
            a += 1
        else:
            b += 1
    if a == N:
        return 0 # Alice gagne
    else:
        return 1
```

Simulons des jeux

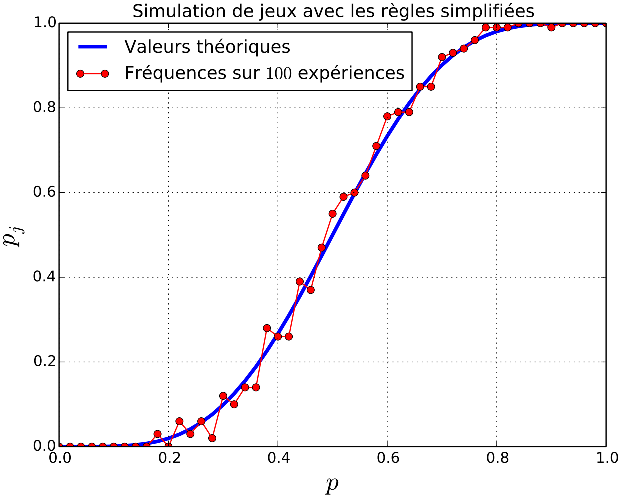
```python
def simul(p, N):
    a, b = 0, 0 # les scores d'Alice et Bob
    while max(a, b) < N:
        if random() < p:
            a += 1
        else:
            b += 1
    if a == N:
        return 0 # Alice gagne
    else:
        return 1

def jouer_matchs(p, N, nb):
    return 1 - sum(simul(p, N) for _ in range(nb))/nb
```

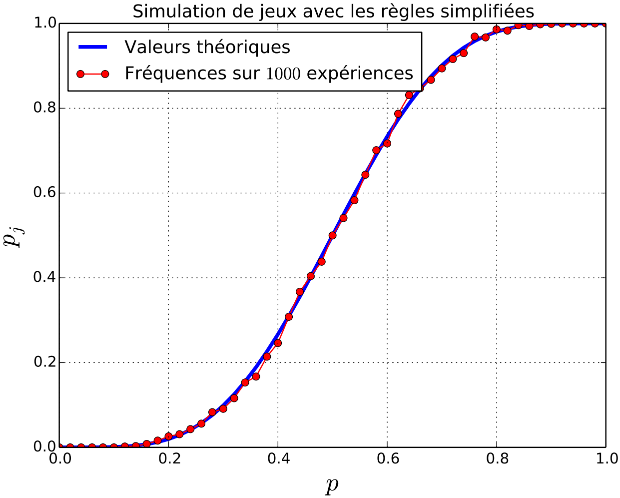
Simulations : résultats ($N = 5$)



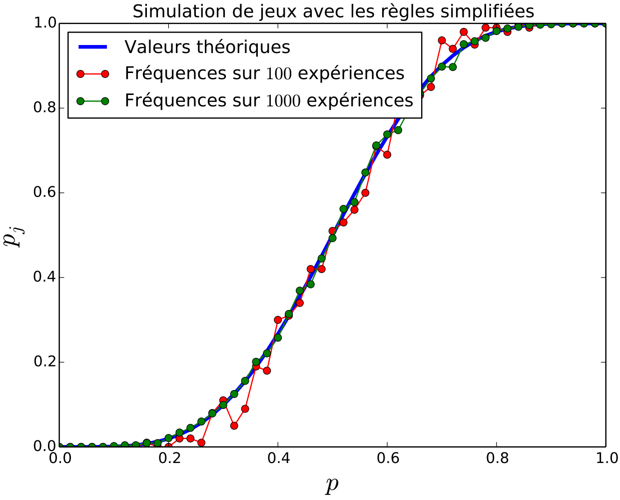
Simulations : résultats ($N = 5$)



Simulations : résultats ($N = 5$)



Simulations : résultats ($N = 5$)



Sommaire

Les vraies règles

- Un jeu (resp. tie-break) pour le premier à avoir au moins quatre (resp. six) points avec au moins deux d'avance.

$$p \longrightarrow \begin{pmatrix} p_j \\ p_t \end{pmatrix} \ ?$$

Les vraies règles

- Un jeu (resp. tie-break) pour le premier à avoir au moins quatre (resp. six) points avec au moins deux d'avance.

$$p \longrightarrow \begin{pmatrix} p_j \\ p_t \end{pmatrix} \ ?$$

- Un set pour le premier à gagner six ou sept jeux avec deux d'avance, ou bien le tie-break après $6/6$.

$$p \longrightarrow \begin{pmatrix} p_j \\ p_t \end{pmatrix} \longrightarrow p_s \ ?$$

Les vraies règles

- Un jeu (resp. tie-break) pour le premier à avoir au moins quatre (resp. six) points avec au moins deux d'avance.

$$p \longrightarrow \begin{pmatrix} p_j \\ p_t \end{pmatrix} \ ?$$

- Un set pour le premier à gagner six ou sept jeux avec deux d'avance, ou bien le tie-break après $6/6$.

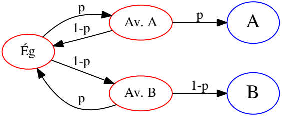
$$p \longrightarrow \begin{pmatrix} p_j \\ p_t \end{pmatrix} \longrightarrow p_s \ ?$$

- Le match pour le premier à gagner deux (ou trois, selon...) sets.

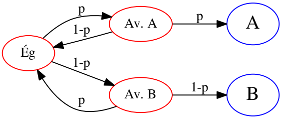
$$p \longrightarrow \begin{pmatrix} p_j \\ p_t \end{pmatrix} \longrightarrow p_s \longrightarrow p_m \ ?$$

Sommaire

Simulations depuis l'égalité

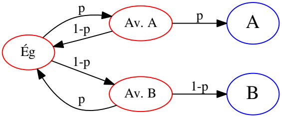


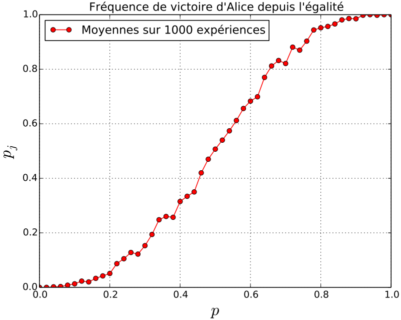
Simulations depuis l'égalité



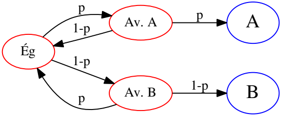

```python
def simulation_egalite(p):
    a, b = 0, 0
    while abs(a-b) < 2:
        if random() < p:
            a += 1
        else:
            b += 1
    if a > b:
        return 0
    else :
        return 1
```

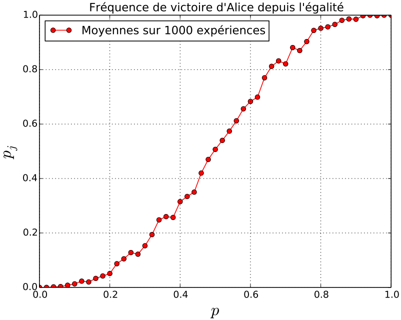
Simulations depuis l’égalité ; résultats

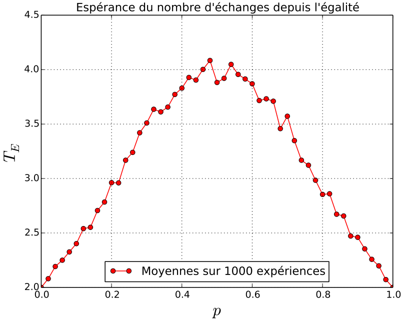




Simulations depuis l'égalité ; résultats

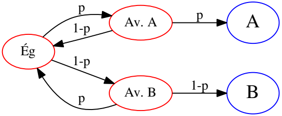






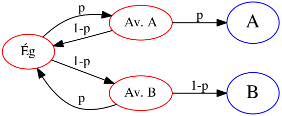
Sommaire

Que se passe-t-il après une égalité ?



Probabilités pour qu'Alice gagne depuis... : p_E, p_A et p_B.

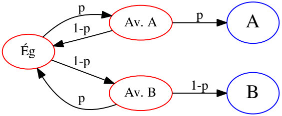
Que se passe-t-il après une égalité ?



Probabilités pour qu'Alice gagne depuis... : p_E, p_A et p_B.

$$\begin{cases} p_E = p.p_A + (1-p)p_B \\ p_A = p + (1-p)p_E \\ p_B = p.p_E \end{cases}$$

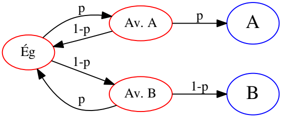
Que se passe-t-il après une égalité ?



Probabilités pour qu'Alice gagne depuis... : p_E, p_A et p_B.

$$\begin{cases} p_E = p.p_A + (1-p)p_B \\ p_A = p + (1-p)p_E \\ p_B = p.p_E \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} p_E \\ p_A \\ p_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_E \\ p_A \\ p_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que se passe-t-il après une égalité ?



Probabilités pour qu'Alice gagne depuis... : p_E, p_A et p_B.

$$\begin{cases} p_E = p.p_A + (1-p)p_B \\ p_A = p + (1-p)p_E \\ p_B = p.p_E \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} p_E \\ p_A \\ p_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_E \\ p_A \\ p_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

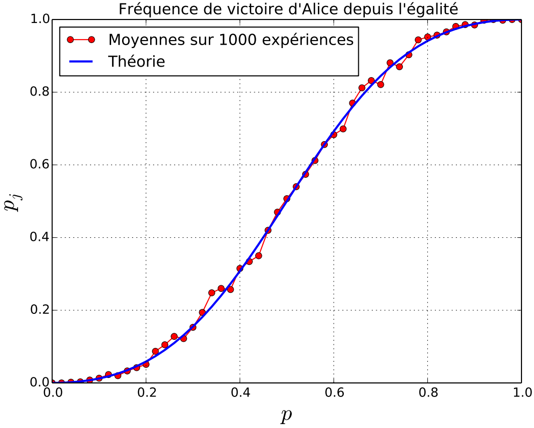
$$\begin{pmatrix} p_E \\ p_A \\ p_B \end{pmatrix} = \left(I_3 - \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que se passe-t-il après une égalité ?

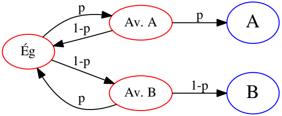
$$p_E = \frac{p^2}{1-2p+2p^2}.$$

Que se passe-t-il après une égalité ?

$$p_E = \frac{p^2}{1-2p+2p^2}.$$

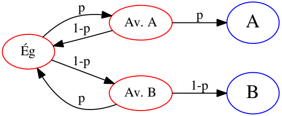


Nombre d'échanges depuis une égalité ?



Espérance du nombre d'échanges depuis... : T_E, T_A et T_B.

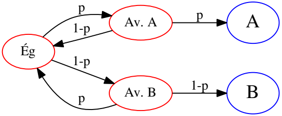
Nombre d'échanges depuis une égalité ?



Espérance du nombre d'échanges depuis... : T_E, T_A et T_B.

$$\begin{cases} T_E = 1 + p.T_A + (1-p)T_B \\ T_A = 1 + (1-p)T_E \\ T_B = 1 + p.T_E \end{cases}$$

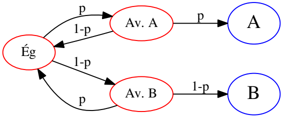
Nombre d'échanges depuis une égalité ?



Espérance du nombre d'échanges depuis... : T_E, T_A et T_B.

$$\begin{cases} T_E = 1 + p.T_A + (1-p)T_B \\ T_A = 1 + (1-p)T_E \\ T_B = 1 + p.T_E \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} T_E \\ T_A \\ T_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_E \\ T_A \\ T_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nombre d'échanges depuis une égalité ?



Espérance du nombre d'échanges depuis... : T_E, T_A et T_B.

$$\begin{cases} T_E = 1 + p.T_A + (1-p)T_B \\ T_A = 1 + (1-p)T_E \\ T_B = 1 + p.T_E \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} T_E \\ T_A \\ T_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_E \\ T_A \\ T_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

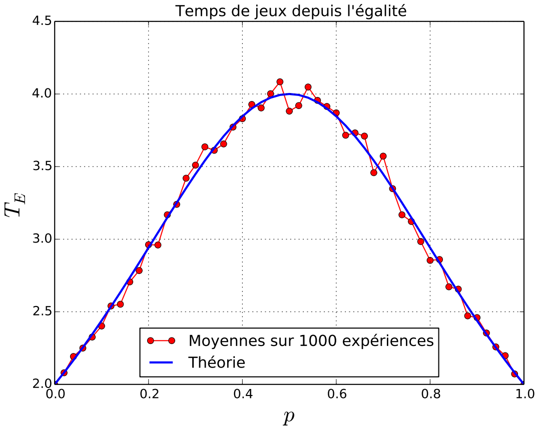
$$\begin{pmatrix} T_E \\ T_A \\ T_B \end{pmatrix} = \left(I_3 - \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nombre d’échanges depuis une égalité ?

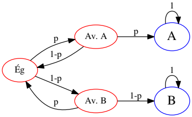
$$T_E = \frac{2}{1-2p+2p^2}.$$

Nombre d'échanges depuis une égalité ?

$$T_E = \frac{2}{1 - 2p + 2p^2}.$$

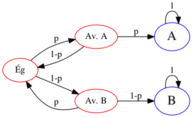


Où sommes-nous après k coups ?



- Probabilités d'être dans les différents *états* : $p_E^{(k)}$, ...

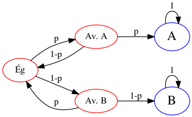
Où sommes-nous après *k* coups ?



- Probabilités d'être dans les différents *états* : $p_E^{(k)}$, ...

$$\begin{pmatrix} p_E^{(k)} & \cdots & p_{BG}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k$$

Où sommes-nous après k coups ?

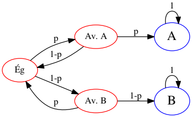


- Probabilités d'être dans les différents *états* : $p_E^{(k)}$, ...

$$\begin{pmatrix} p_E^{(k)} & \cdots & p_{BG}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k$$

- Probabilité pour que A gagne en au plus k coups ?

Où sommes-nous après k coups ?



- Probabilités d'être dans les différents *états* : $p_E^{(k)}$, ...

$$\begin{pmatrix} p_E^{(k)} & \cdots & p_{BG}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k$$

- Probabilité pour que A gagne en au plus k coups ?

Prendre la quatrième composante

Sommaire

Puissances d'une matrice stochastique

- Si seulement on avait...

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Alors on aurait :

$$M^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Puissances d'une matrice stochastique

- Si seulement on avait...

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Alors on aurait :

$$M^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

- Coup de chance ! C'est le cas avec $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$ et $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$.

Puissances d'une matrice stochastique

- Si seulement on avait...

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Alors on aurait :

$$M^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

- Coup de chance ! C'est le cas avec $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$ et $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$.
- Corollaire : $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ; et on sait même vers quoi !

Puissances d'une matrice stochastique

- Si seulement on avait...

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

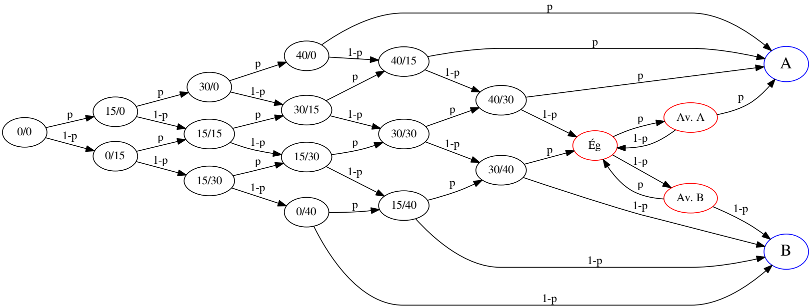
Alors on aurait :

$$M^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_5^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

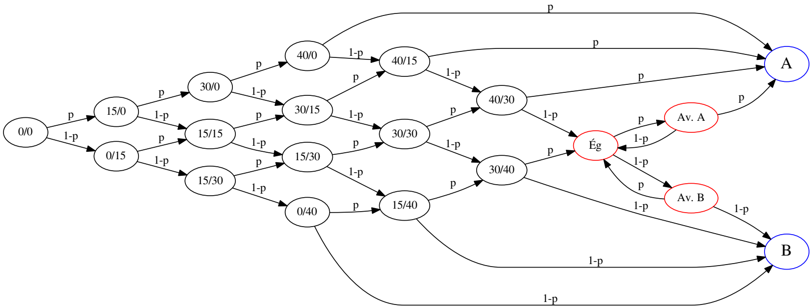
- Coup de chance ! C'est le cas avec $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$ et $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$.
- Corollaire : $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ; et on sait même vers quoi !
- En pratique : $k = 100$ est une excellente approximation de l'infini !

Sommaire

Graphe d'un vrai jeu

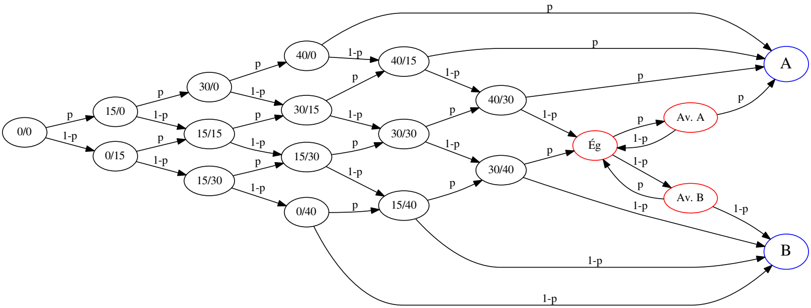


Graphe d'un vrai jeu



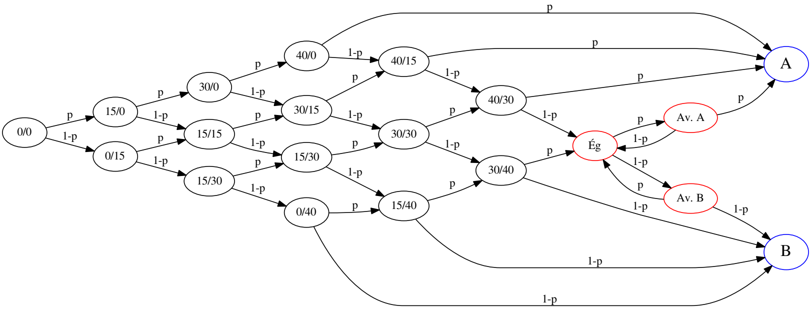
- 20 états...

Graphe d'un vrai jeu



- 20 états...
- mais la théorie reste la même !

Graphe d'un vrai jeu



- 20 états...
- mais la théorie reste la même !
- Pour un tie-break, c'est presque pareil (avec 53 états).

Matrice d'un vrai jeu

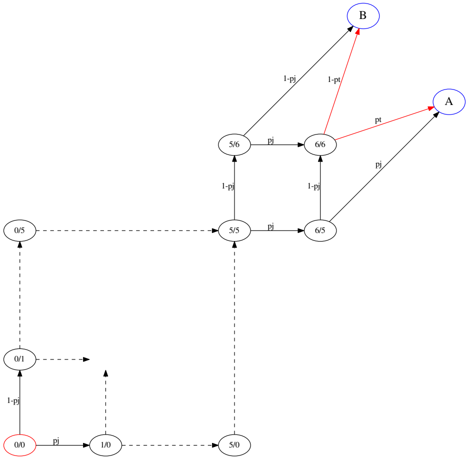
$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & p & 1-p & 0 & (0) & \\ & & & \cdots & & & & \\ & (0) & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{20}(\mathbb{R})$$

Matrice d'un vrai jeu

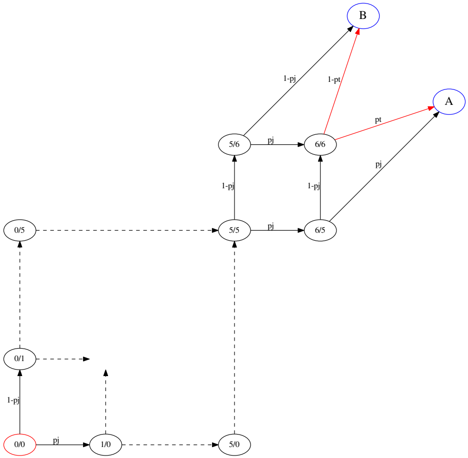
$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & p & 1-p & 0 & (0) & \\ & & & \cdots & & & & \\ & (0) & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{20}(\mathbb{R})$$

```python
def transitions(p):
    mat = np.zeros( (20, 20) )
    mat[18, 18] = 1
    mat[19, 19] = 1
    for (d, f) in [(0,1), (1,3), ..., (17, 15)]:
        mat[d, f] = p
    for (d, f) in [(0,2), (2,5), ..., (16,15)]:
        mat[d, f] = 1-p
    return mat
```

Graphe d'un vrai set

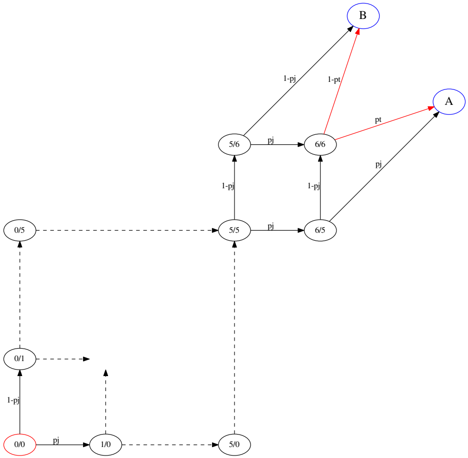


Graphe d'un vrai set



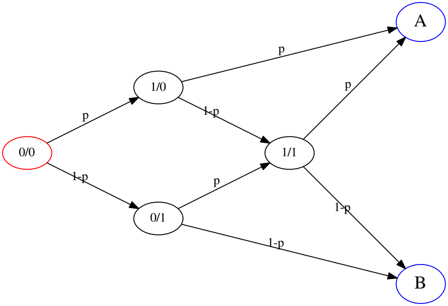
- 41 états...

Graphe d'un vrai set



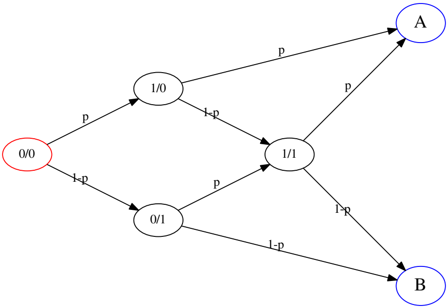
- 41 états...
- et toujours la même théorie

Graphe d'un match en deux sets gagnant



- 6 états (11 pour un match en trois sets gagnant)...

Graphe d'un match en deux sets gagnant



- 6 états (11 pour un match en trois sets gagnant)...
- Et vous savez quoi ? Toujours la même théorie

Sommaire

Principe des calculs et simulations

- p_j calculé via :

$$L_{19} M_J^{100} C_1 \quad (= (M_J^{100})_{1,19})$$

- Même chose pour p_T, p_s et p_m.

Principe des calculs et simulations

- p_j calculé via :

$$L_{19} M_J^{100} C_1 \quad (= (M_J^{100})_{1,19})$$

- Même chose pour p_T, p_s et p_m.
- Temps de jeu : en résolvant $T = M_j' T + U$, avec M_j' la matrice « réduite ».

Principe des calculs et simulations

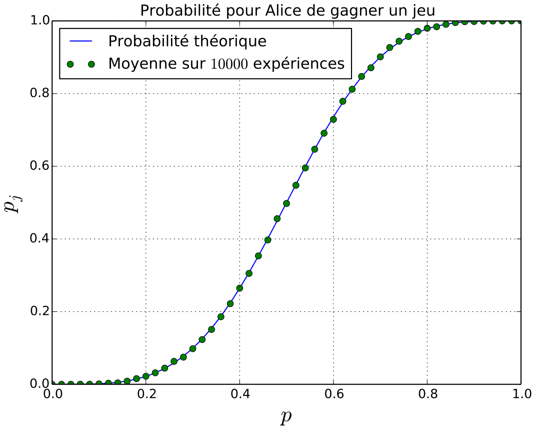
- p_j calculé via :
$$L_{19} M_J^{100} C_1 \quad (= (M_J^{100})_{1,19})$$
- Même chose pour p_T, p_s et p_m.
- Temps de jeu : en résolvant $T = M_j' T + U$, avec M_j' la matrice « réduite ».
- Des formules exactes sont accessibles... via du calcul formel.

Principe des calculs et simulations

- p_j calculé via :
$$L_{19} M_J^{100} C_1 \quad (= (M_J^{100})_{1,19})$$
- Même chose pour p_T, p_s et p_m.
- Temps de jeu : en résolvant $T = M_j' T + U$, avec M_j' la matrice « réduite ».
- Des formules exactes sont accessibles... via du calcul formel.
- Simulations : bien exprimer les conditions de gain (et, ou, maximum, etc...).

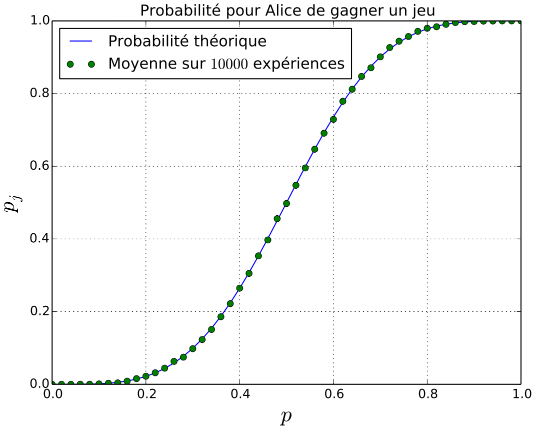
Sommaire

Pour un jeu



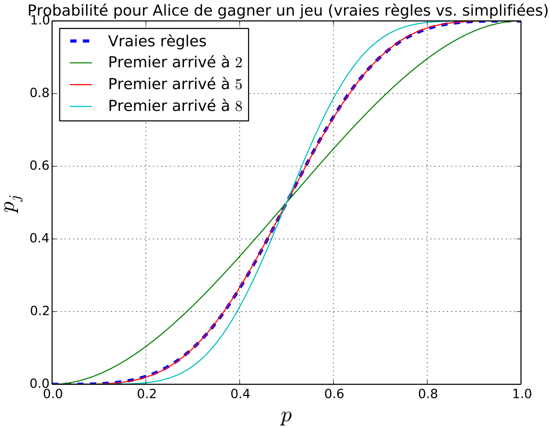
Probabilité pour Alice de gagner un jeu
Probabilité théorique
Moyenne sur 10000 expériences
p_j
p
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Pour un jeu

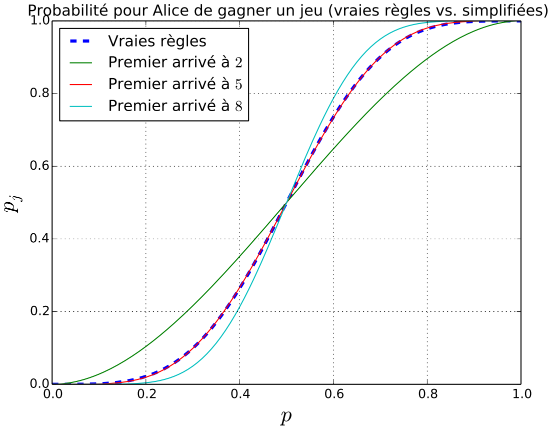


Hum... ça me rappelle un truc déjà vu !

Pour un jeu : WOW !

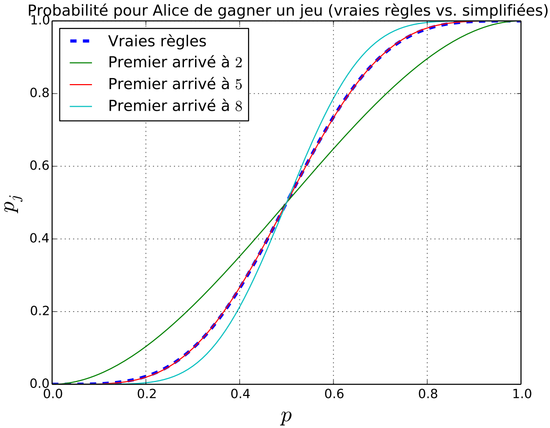


Pour un jeu : WOW !



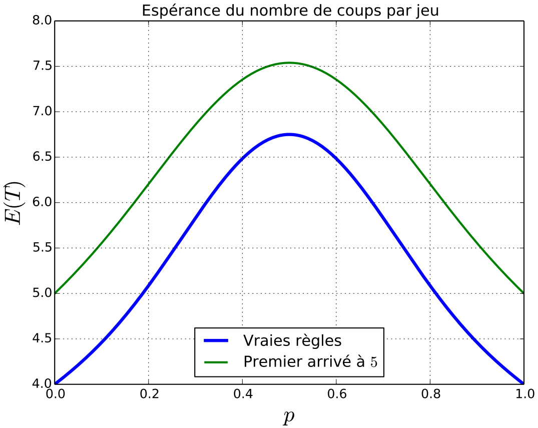
Incroyable ! ! ! !

Pour un jeu : WOW !



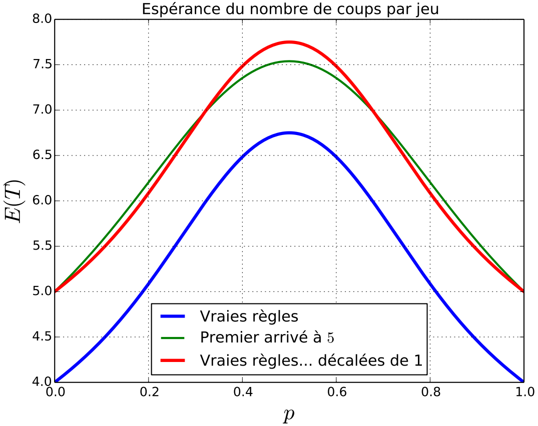
Incroyable ! ! ! ! (mais en fait, non...)

Espérance du nombre d'échanges par jeu



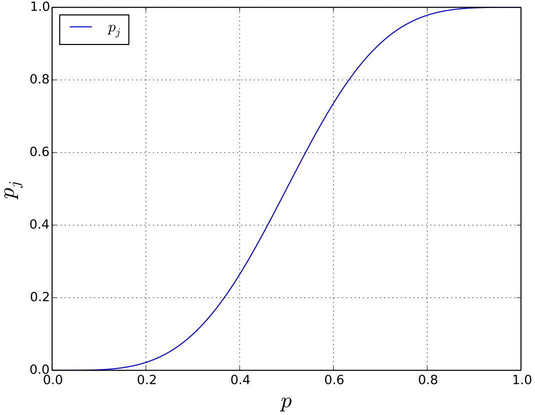
Hum...

Espérance du nombre d'échanges par jeu



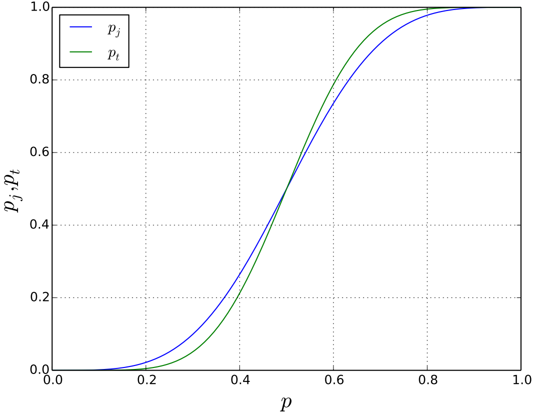
Hum... Ha non !

Probabilité pour qu'Alice gagne...



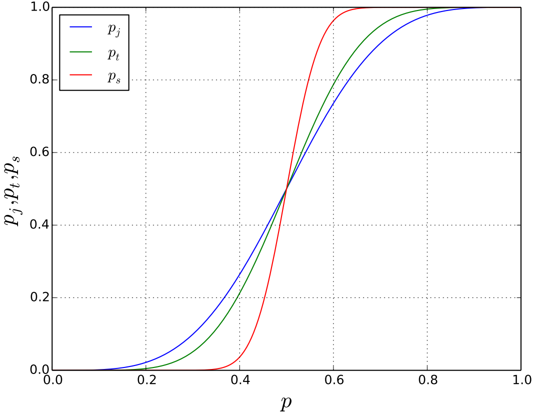
Un jeu...

Probabilité pour qu'Alice gagne...



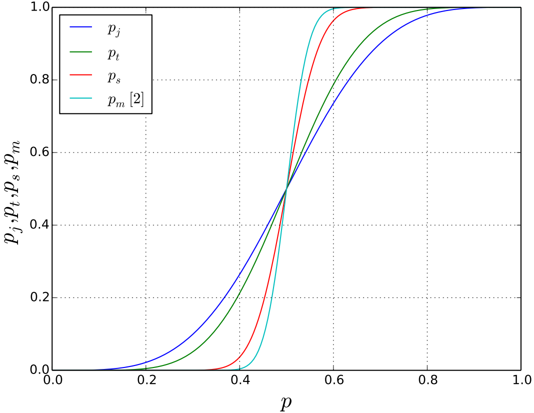
Un jeu... un tie-break...

Probabilité pour qu'Alice gagne...



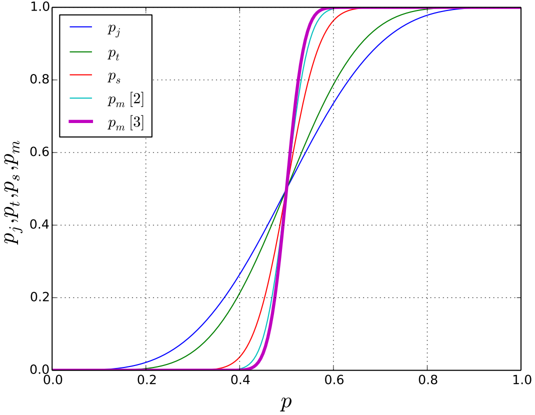
Un jeu... un tie-break... un set...

Probabilité pour qu'Alice gagne...



Un jeu... un tie-break... un set... un match en deux sets gagnants...

Probabilité pour qu'Alice gagne...



Un jeu... un tie-break... un set... un match en deux sets gagnants... ou 3 !

Concrètement...

- Si Alice gagne 51% des échanges, alors elle gagne :
  - $52,5\%$ des jeux normaux ($53,2\%$ des tie-break) ;

Concrètement...

- Si Alice gagne 51% des échanges, alors elle gagne :
  - $52,5\%$ des jeux normaux ($53,2\%$ des tie-break) ;
  - $57,1\%$ des sets ;

Concrètement...

- Si Alice gagne 51% des échanges, alors elle gagne :
  - $52,5\%$ des jeux normaux ($53,2\%$ des tie-break) ;
  - $57,1\%$ des sets ;
  - $60,6\%$ des matchs en deux sets gagnants...
  - et $63,2\%$ des matchs en trois sets gagnants.

Concrètement...

- Si Alice gagne 51% des échanges, alors elle gagne :
  - $52,5\%$ des jeux normaux ($53,2\%$ des tie-break) ;
  - $57,1\%$ des sets ;
  - $60,6\%$ des matchs en deux sets gagnants...
  - et $63,2\%$ des matchs en trois sets gagnants.
- Si Alice gagne 52% des échanges, alors elle gagne :

Concrètement...

- Si Alice gagne 51% des échanges, alors elle gagne :
  - $52,5\%$ des jeux normaux ($53,2\%$ des tie-break) ;
  - $57,1\%$ des sets ;
  - $60,6\%$ des matchs en deux sets gagnants...
  - et $63,2\%$ des matchs en trois sets gagnants.
- Si Alice gagne 52% des échanges, alors elle gagne :
  - $55,0\%$ des jeux normaux ($56,3\%$ des tie-break) ;

Concrètement...

- Si Alice gagne 51% des échanges, alors elle gagne :
  - $52,5\%$ des jeux normaux ($53,2\%$ des tie-break) ;
  - $57,1\%$ des sets ;
  - $60,6\%$ des matchs en deux sets gagnants...
  - et $63,2\%$ des matchs en trois sets gagnants.
- Si Alice gagne 52% des échanges, alors elle gagne :
  - $55,0\%$ des jeux normaux ($56,3\%$ des tie-break) ;
  - $64,0\%$ des sets ;
  - $70,5\%$ des matchs en deux sets gagnants...
  - et $74,9\%$ des matchs en trois sets gagnants.

C'est fini...

Merci de votre attention !